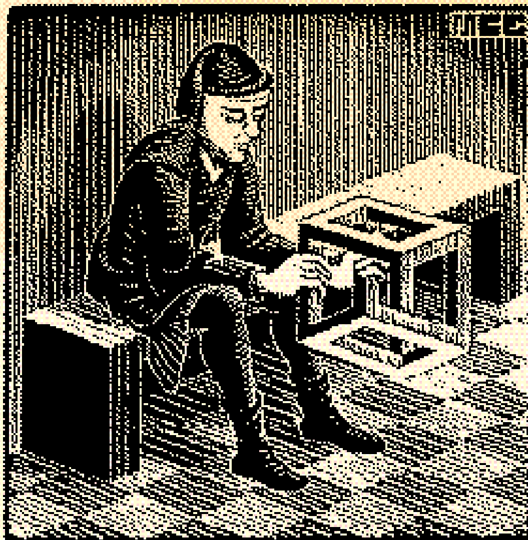
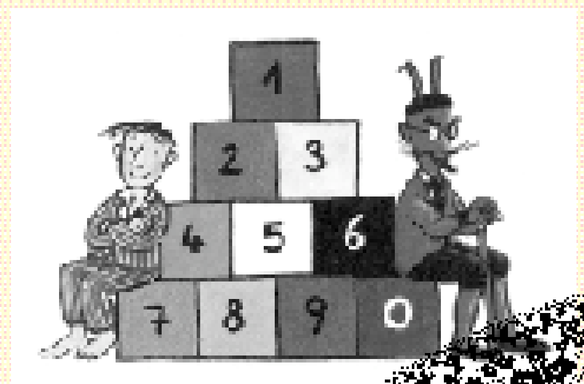
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 73
1997-1998 april/mei
7





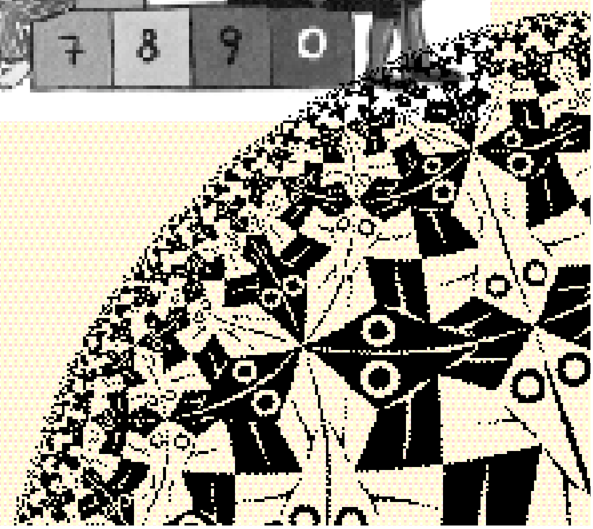
Een Fibonacci-identiteit

Tweede Fase:

Leren redeneren

Studielast/lesuren

Examenbesprekingen





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Gen. Cronjéstraat 79 rood
2021 JC Haarlem.
e-mail: cph@XS4all.nl

Richtlijnen voor artikelen:

- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Nadere richtlijnen worden op verzoek toegezonden.

Richtlijnen voor mededelingen:

- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint
Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle
tel. 038-4539985
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
113015.261@compuserve.com
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19, 8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: NVvW@euronet.nl

Contributie per ver. jaar: ƒ 75,00
Studentleden: ƒ 37,50
Leden van de VVWL: ƒ 50,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer.
Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar.
Betaling geschiedt per acceptgiro.
Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties

Informatie, prijsopgave en inzending:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4
7061 WR Terborg, tel. 0315-324337
of:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-6390890
fax 078-6390891.

Adresgegevens auteurs

A. van Asch
Benedenmolenweg 3D
4112 NS Beusichem

D. Beckers, O. van Gaans
KU Nijmegen/Wiskunde
Postbus 9010
6500 GL Nijmegen

R. Bosch
Heiakker 16
4841 CR Prinsenbeek

M. van Glabbeek
E. de Boer v. Rijkstraat 15
2331 HH Leiden

L. ten Have
Sierkershof 12
1112 GM Diemen

C.B. Hofstra
R. Pollemaplein 1
8802 RT Franeker

H.J. Smid
TU Delft, Fac. TWI
Postbus 5031
2600 GA Delft

C. Zaal
Universiteit van Amsterdam
faculteit WINS
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam

Inhoud

218 Kees Hoogland
Van de redactietafel

219 Rob Bosch
Een Fibonacci-identiteit

222 Rob Bosch
π en e

224 Danny Beckers, Onno van Gaans
Eerlijk vals spelen

227 Cor Hofstra
Leren redeneren

230 Kees Hoogland
Studielast en lesuren in de Tweede Fase

234 F. van der Blij, A.G. van Asch
Een oud probleem

235 Wim Kuipers, Marian Kollenveld
Van de bestuurstafel

236 **Examenbesprekingen in mei 1998**

238 Michel van Glabbeek
Wiskunde voor iedereen

239 De redactie
Redactie Euclides
Bert Zwaneveld neemt afscheid

241 Harm Jan Smid
De telduivel
BOEKBESPREKING

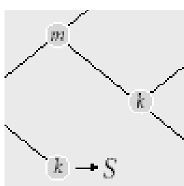
245 **Escherprijsvraag 1998**

247 **40 jaar geleden**

248 **Werkbladen**

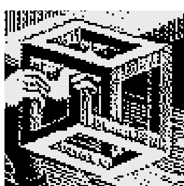
250 **Recreatie**

252 **Kalender**



224


241


245

van de redactietafel

Onlangs was er weer veel publiciteit over de dalende belangstelling van leerlingen voor een vervolgstudie in een bèta-vak. De keuze voor een bèta-vervolgopleiding is de laatste jaren flink gedaald. Zo is alleen al bij technische vervolgopleidingen het aantal eerstejaars tussen 1991 en 1996 gedaald met bijna 30%. Dit zijn toch wel zorgwekkende ontwikkelingen voor een land dat het moet hebben van informatietechnologie en techniek.
Met name bij de traditionele opleidingen, wiskunde, natuurkunde en scheikunde, is het voor de leerlingen niet duidelijk welk aantrekkelijk beroepsperspectief deze studies mogelijk geven. Op de scholen die in 1998 starten met de Tweede Fase havo en vwo, lijkt er, vergeleken met nu, een toename te zijn in de belangstelling voor de Natuurprofielen.
Te hopen valt dat de bèta-vervolgopleidingen wat betreft inhoud en vormgeving goed zullen gaan aansluiten op die vernieuwde Tweede Fase. Voor je het weet zien leerlingen in het voortgezet onderwijs al bij de profielkeuze te weinig perspectief in bèta. Dat zou een verspilling zijn van talent en van onze gemeenschappelijke expertise in wiskundeonderwijs.

vbo/mavo

In 'Van de bestuurstafel' dit keer kort de stand van zaken wat betreft de leerwegen mavo/vbo/vso, een grootscheepse verandering in organisatie en structuur.
Ook bij deze verandering zal wiskunde onvermijdelijk een belangrijke inhoudelijke rol gaan spelen. Want wiskunde heeft meerdere kanten dan alleen het opleiden van bèta-leerlingen. Ook voor de zwakste leerlingen speelt rekenen/wiskunde, als voortzetting van het basisonderwijs, een belangrijke rol bij het weerbaar maken van deze leerlingen op het gebied van gecijferdheid en technologie.

havo/vwo

Een aantal scholen heeft gereageerd op de oproep om hun studielast- en urenverdeling aan Euclides te zenden. Verderop in dit nummer vindt u een overzicht. Ook inhoudelijk wordt er nog steeds ervaring opgedaan met nieuwe leerstof. Cor Hofstra laat in zijn artikel 'Leren en redeneren' zien hoe hij en zijn leerlingen bezig zijn met de voortgezette meetkunde uit het vwo wiskunde B-programma. Dat Cor Hofstra op meerdere terreinen van het wiskundeonderwijs actief is bleek onlangs op de conferentie 'Studiehuis in de steigers IV'. Daar ontving hij de Solberg-Verlindenprijs voor zijn essay 'Wiskunde in het examendossier, een praktisch probleem'. De redactie van Euclides feliciteert hem daarmee van harte. Voor de volgende jaargang van Euclides zal hij zijn ervaringen met wiskunde in het examendossier op schrift stellen.

Examenbesprekingen

Binnenkort zijn alweer de eindexamens. De data en plaatsen van de examenbesprekingen treft u ook aan in dit nummer.
Dit jaar het tweede vbo/mavo C/D-examen volgens het nieuwe leerplan. Er is destijds aangekondigd dat dit moeilijker zal zijn dan vorig jaar. Hopelijk zullen de leerlingen zich er goed doorheen slaan. Spannend is ook het havo wiskunde B-examen. Dit is het eerste B-examen voor leerlingen die in de onderbouw het nieuwe leerplan wiskunde hebben gevolgd. Anderhalf jaar geleden was er veel zorg over de aansluiting naar 4 havo. Nu zal gaan blijken hoe docenten en leerlingen zich daaruit gered hebben. Het voornemen is om het eerste nummer van de volgende jaargang grotendeels te wijden aan de examens. Reacties van lezers op de examens zijn altijd welkom bij de redactie. Deze zouden dan wel voor de zomervakantie bij de redactie binnen moeten zijn.

Kees Hoogland

Een Fibonacci-identiteit

Rob Bosch

Inleiding

In de vorige jaargang van Euclides is tweemaal aandacht besteed aan het puzzeltje waarbij een vierkant van 8×8 wordt verdeeld in vier stukken die tezamen een rechthoek vormen van 5×13. Eénmaal in de rubriek 'Waar zit de fout' (72-2) en éénmaal in de puzzelrubriek (72-7). In §2 van dit artikel bespreken we de Fibonacci-identiteit die ten grondslag ligt aan de puzzel en zullen we laten zien dat deze identiteit meerdere van dergelijke puzzels oplevert. In §3 bewijzen we deze identiteit door eigenschappen van matrices te vertalen naar relaties tussen Fibonaccigetallen. Met dezelfde methode leiden we nog enkele andere identiteiten af.

Fibonaccigetallen

De Fibonaccigetallen worden gedefinieerd door de betrekking:

$$F_0 = 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \; (n > 1) \qquad (1)$$

De charme van de Fibonaccigetallen is de eenvoudige recurrente betrekking waarmee ze gedefinieerd worden en de grote verscheidenheid aan relaties waaraan ze voldoen. Zo berust het mysterie van de in de inleiding genoemde puzzel op de volgende relatie:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1} \quad (n > 0) \qquad (2)$$

Ter illustratie nemen we $n = 6$ en $n = 7$. Dan vinden we:

$$F_6^2 - F_5 \cdot F_7 = 8^2 - 13 \cdot 5 = -1$$

$$F_7^2 - F_8 \cdot F_6 = 13^2 - 8 \cdot 21 = 1$$

Met een eenvoudig inductiebewijs tonen we de juistheid van relatie (2) aan.
Voor $n = 1$ is (2) $F_1^2 - F_0 \cdot F_2 = 1 - 0 \cdot 2 = 1$
De relatie is dus juist voor $n = 1$.
De juistheid voor $n + 1$ volgt uit die voor n door de relatie (1) tweemaal te substitueren.

$$\begin{aligned} F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} &= F_{n+1}^2 - F_n(F_n + F_{n+1}) \\ &= F_{n+1}^2 - F_n^2 - F_nF_{n+1} \\ &= -F_n^2 + F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) \\ &= -F_n^2 + F_{n+1}F_{n-1} \\ &= -(F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}) \\ &= -(-1)^{n+1} = (-1)^{n+2} \end{aligned}$$

Als we in (2) n door $2n$ vervangen vinden we:

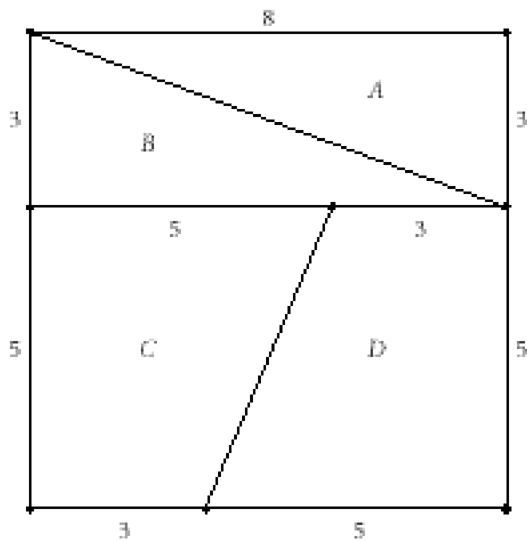
$$F_{2n}^2 - F_{2n-1}F_{2n+1} = -1 \qquad (3)$$

Voor $n = 3$ geeft (3):

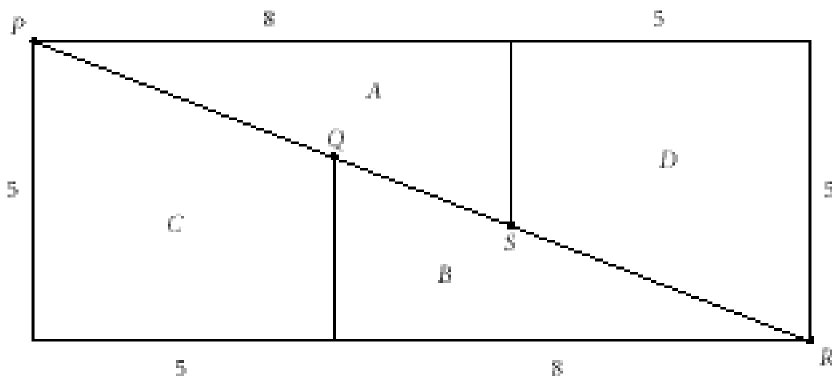
$$8^2 - 5 \cdot 13 = -1$$

We kunnen deze gelijkheid als volgt interpreteren. Een vierkant met zijden van 8 eenheden heeft een oppervlakte welke één kleiner is dan de rechthoek met zijden van 5 en 13 eenheden. De verklaring van de puzzel waarbij een vierkant van 8×8 in vier stukken wordt verdeeld die tezamen een rechthoek van 5×13 vormen (figuur 1a en figuur 1b), is dat de punten P, Q, R

en S in werkelijkheid de hoekpunten van een parallellogram met oppervlakte 1 zijn. Het gat dat zo in de rechthoek ontstaat, is echter nauwelijks te zien.



figuur 1a



figuur 1b

De voorgaande constructie kan worden uitgevoerd met ieder vierkant waarvan de zijden gelijk zijn aan een Fibonaccigetal F_{2n}. We verdelen het vierkant in de stukken A, B, C en D op de manier als in fig 2a.

We vormen met deze stukken een rechthoek met een gat in de vorm van een parallellogram met oppervlakte 1. Zie figuur 2b.

Uiteraard is het gat hier overdreven groot getekend. De oppervlakte van het parallellogram $PQRS = h \times PS = 1$.
Met Pythagoras vinden we $PS = \sqrt{F_{2n}^2 + F_{2n-2}^2}$.
De hoogte h van het parallellogram is dus gelijk aan

$$\frac{1}{\sqrt{F_{2n}^2 + F_{2n-2}^2}}$$

Als we $n = 3$ nemen en als eenheid cm dan is deze hoogte $h = \dfrac{1}{64 + 9} = 0{,}11704$, dus ongeveer 1,2 mm.

Het gat is zo smal dat het nauwelijks waarneembaar is. Voor grotere n is dit effect uiteraard nog sterker.

De Fibonaccimatrix

In deze paragraaf introduceren we de Fibonaccimatrix. Met behulp van deze matrix kunnen we een ander kort en elegant bewijs geven van relatie (2). Tevens kunnen we tal van relaties tussen de Fibonaccigetallen afleiden waarbij slechts de kennis van de elementaire matrixrekening nodig is.
We definiëren de Fibonaccimatrix door

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

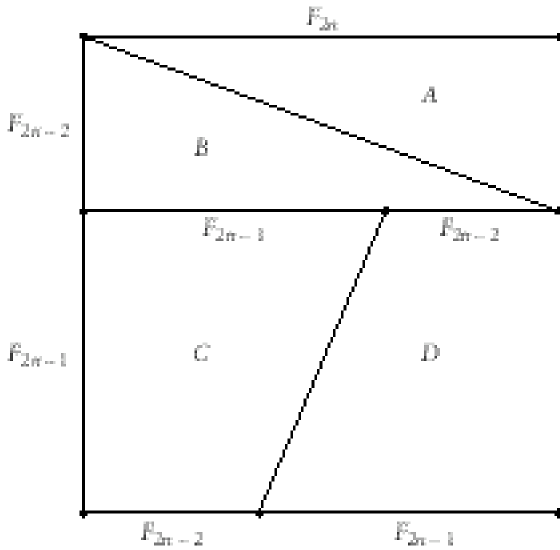
Merk op dat de elementen van de matrix Fibonaccigetallen zijn dat wil zeggen

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} F_0 & F_1 \\ F_1 & F_2 \end{pmatrix}$$

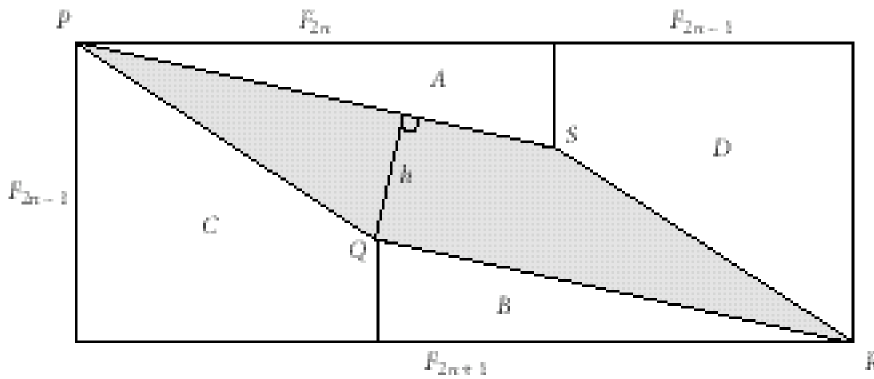
De matrix $\mathfrak{F}$ heeft de eigenschap dat de machten van deze matrix weer Fibonaccigetallen als elementen hebben. Er geldt namelijk:

$$\mathfrak{F}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix}$$

Met inductie is de bewering eenvoudig te bewijzen.
Daar $F_0 = 0$ en $F_1 = F_2 = 1$, is het gestelde juist voor $n = 1$.



figuur 2a



figuur 2b

Stel nu dat

$$\mathfrak{F}^n = \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{voor zekere } n \geq 1, \text{ dan}$$

$$\mathfrak{F}^{n+1} = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n-1} + F_n & F_n + F_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_{n+2} \end{pmatrix}$$

Uit de juistheid voor n volgt dus de juistheid voor $n + 1$, waarmee het gestelde bewezen is.
Dit eenvoudige resultaat stelt ons in staat simpele bewijzen te geven van tal van Fibonaccirelaties. De relatie (2) bijvoorbeeld volgt onmiddellijk uit een eigenschap van determinanten.

Voor determinanten geldt: $\det(\mathfrak{F}^n) = (\det \mathfrak{F})^n$.
Daar $\det(\mathfrak{F}) = -1$ en $\det(\mathfrak{F}) = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$ volgt dat $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$.
Klaar!

Uit de regels voor matrixvermenigvuldiging leiden we een andere belangwekkende identeit af.
Voor matrixvermenigvuldiging geldt: $\mathfrak{F}^{n+k} = \mathfrak{F}^n \cdot \mathfrak{F}^k$, en dus

$$\begin{pmatrix} F_{n+k-1} & F_{n+k} \\ F_{n+k} & F_{n+k+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} F_{n-1} & F_n \\ F_n & F_{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} & F_k \\ F_k & F_{k+1} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} F_{n-1}F_{k-1} + F_nF_k & \\ & F_{n-1}F_k + F_nF_{k+1} \end{pmatrix}$$

Vergelijking van de matrixelementen (1, 2) en (1, 1) geeft:

$$F_{n+k} = F_nF_{k-1} + F_{n+1}F_k \tag{4}$$

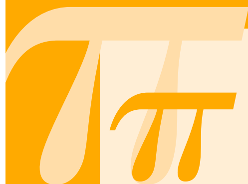
en

$$F_{n+k-1} = F_{n-1}F_{k-1} + F_nF_k \tag{5}$$

Relatie (5) volgt overigens ook door in (4) voor n, $n-1$ te nemen.
Voor $k = n$ vinden we uit (4) en (5)

$$F_{2n} = F_nF_{n-1} + F_nF_{n+1} \tag{6}$$

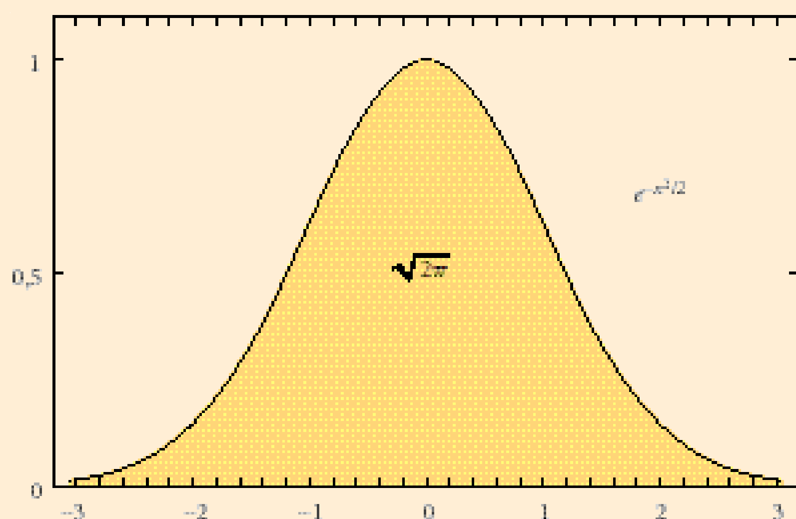
$$F_{2n-1} = F_{n-1}^2 + F_n^2 \tag{7}$$



π en e

Niet zelden treffen we π en e samen aan. Zo wordt de kansdichtheidsfunctie f van de standaardnormale verdeling gegeven door:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$$



Het getal π verschijnt hier omdat de oppervlakte onder de grafiek van de functie $g(x) = e^{-x^2/2}$ gelijk is aan $\sqrt{2\pi}$. Een resultaat dat geenszins triviaal is, temeer niet omdat we geen primitieve functie kunnen vinden van $g(x)$ in eenvoudige functies. Desalniettemin kunnen we de totale oppervlakte onder de grafiek van $g(x)$ berekenen door over te gaan op poolcoördinaten.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\, e^{-y^2/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

De overgang op poolcoördinaten $x = r\cos\phi$ en $y = r\sin\phi$ geeft

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} re^{-r^2/2}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi = 2\pi$$

waaruit volgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$$

In de benaderingsformule van Stirling komen we π en e weer tegen.

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

Een complex maar toch simpel voorbeeld is de formule van Euler waarin ook nog het imaginaire getal i figureert.

$$e^{i\pi} = -1$$

Rob Bosch

Een goniovergelijking met Fibonacci-oplossingen

Een reactie van *Jan Meisters* uit Schiedam op het stukje π en de Fibonaccigetallen (Euclides 73-5, p. 150) gaf aanleiding tot de volgende vraag:

Voor welke $x, y \in Q$ geldt
$\arctan x + \arctan y = \pi/4$?

Het blijkt dat de rationale oplossingen van deze vergelijking alles te maken hebben met Fibonacci-rijen. Een Fibonaccirij is een rij van gehele getallen $F_0, F_1, F_2, \ldots$, waarvoor geldt $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

Uit $\arctan x + \arctan y = \pi/4$ volgt
$\tan(\arctan x + \arctan y) = \tan \pi/4 = 1$
De somformule voor de tangens geeft:

$$\frac{x + y}{\ } = 1$$

waaruit we afleiden

$$y = \frac{1 - x}{\ }$$

Stel $x = \frac{a}{b}$, dan is

$$y = \frac{1 - a/b}{\ } = \frac{b - a}{\ }$$

Nu zijn de getallen
$b - a, a, b, a + b$ vier opeenvolgende termen uit een Fibonaccirij met zekere beginvoorwaarden.
Als we deze vier opeenvolgende termen respectievelijk F_n, F_{n+1}, F_{n+2} en F_{n+3} noemen, dan kunnen we schrijven:

$$x = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}} \quad \text{en} \quad y = \frac{F_n}{F_{n+3}}$$

Uit het bovenstaande blijkt dat de in het stukje π en de Fibonaccigetallen vermelde relatie niet alleen geldt voor de bekende Fibonaccirij met $F_0 = 0$ en $F_1 = 1$, maar dat deze relatie geldt voor alle Fibonaccirijen.

De lezer kan nog vele Fibonacci-identiteiten aan deze voorbeelden toevoegen door weer andere matrixeigenschappen te vertalen in relaties tussen de Fibonacci-getallen.

Literatuur

D. Cohen
Basic techniques of combinatorial theory
Wiley 1978

D. Knuth
Concrete mathematics
Addison-Wesley 1989

S. Vadja
Fibonacci and Lucas numbers
Ellis Horwood

Eerlijk vals spelen

Danny Beckers, Onno van Gaans

Inleiding

Om maar meteen een open deur in te trappen: vals spelen is niet eerlijk. In die zin is de titel boven dit stukje enigszins paradoxaal. Als twee spelers het echter eens zijn over een verzameling spelregels die één van hen beiden meer winstkans laat ten koste van de ander, ook al zijn zij zich dit niet beiden bewust, dan is daarmee niet vals gespeeld in de conventionele betekenis van het woord. Bij het boter-, kaas- en eierenspel is bekend dat alleen degene die de eerste zet mag doen een serieuze kans op winst maakt. Waarom mensen roulette spelen is kanstheoretisch een waar raadsel. Er zijn echter een aantal voorbeelden van 'eerlijk vals spelen' die niet zo doorzichtig zijn; die zelfs verrassend mogen heten. In dit stukje zullen een paar van dit soort spelletjes de revue passeren.

Chuck-a-luck

Onder deze naam wordt een in de V.S. populair spel gespeeld met drie gewone dobbelstenen. Een speler zet een tevoren afgesproken bedrag in, steeds op een van de getallen 1 tot en met 6. Vervolgens wordt er met de dobbelstenen gegooid. Komt het gekozen getal niet boven, dan is de speler zijn inzet kwijt. Komt het gekozen getal één keer boven, dan krijgt de gokker zijn of haar inzet verdubbeld terug — en maakt dus winst. Wordt het gekozen getal twee keer geworpen, dan krijgt de speler de inzet drievoudig. Verschijnt het gekozen getal drie keer, dan krijgt de speler de inzet vier keer terug.
Oppervlakkig geredeneerd klinkt het alsof dit spel tamelijk gunstig voor de speler zal uitpakken: er is sowieso drie keer 1/6 kans op profijt, en daarboven nog extra winstkansen wanneer het genoemde aantal ogen meerdere keren boven komt liggen. In de praktijk zal het echter ongunstig voor de speler uitpakken. Een doorwrocht en wetenschappelijk verantwoord argument als de verwachte winst (zie figuur 1) leert immers dat de speler kan rekenen op een winst van –17/216 deel van de inzet. Geen dramatische verliezen, maar toch wel enigszins opzienbarend! Menig beginnend kansrekenaar zal in eerste instantie niet verwachten met dit spel te verliezen.

De dobbelstenen van Van Rooij

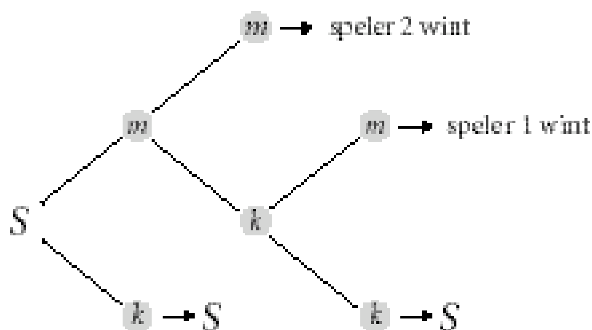
Zijn de te verwachten verliezen voor de speler in het voorgaande spel nog binnen maatschappelijk acceptabele grenzen, in dit geval is er sprake van een meer ongebreidelde bevoordeling. Het spel met de dobbelstenen van Van Rooij wordt gespeeld met twee personen en vier bijzondere kubusvormige dobbelstenen D_0, D_1, D_2, D_3:
D_0 heeft vier vlakjes met een 4 en twee zonder (met 0) ogen.
D_1 heeft op alle zes de vlakjes 3 ogen.
D_2 heeft vier vlakjes met 2 en twee vlakjes met 6 ogen.
D_3 heeft drie vlakjes met 1 en drie vlakjes met 5 ogen.
Het spel verloopt als volgt: laat uw tegenspeler vrij een dobbelsteen kiezen waarna u zelf één van de overgebleven stenen kiest. Vervolgens wordt gespeeld om het hoogste aantal ogen: beide spelers zetten een vooraf afgesproken bedrag in, en bij elke beurt gaat de inzet naar degene die het hoogste aantal ogen werpt.
Bij dit spelletje is de speler die als tweede een dobbelsteen mag kiezen in het voordeel. De bijzondere set dobbelstenen stelt u in staat altijd een dobbelsteen te kiezen die met kans 2/3 een hoger aantal ogen gooit dan degene die uw tegenstander heeft gekozen. Kiest uw tegenspeler namelijk D_3 dan bent u met D_2 beter af; kiest hij D_2 dan met D_1 en bij D_1 met D_0. Denkt uw slachtoffer slim te zijn door D_0 te kiezen, dan pakt D_3 toch weer gunstiger uit. U kunt dit met behulp van gevalsonderscheid narekenen. De dobbelstenen hebben we genoemd naar de Nijmeegse hoogleraar prof. dr. A.C.M. van Rooij, die een dergelijke set in zijn bezit heeft. Het waren deze dobbelstenen die ons inspireerden dit stukje te schrijven.
Overigens kan het nog een stapje beter: wanneer we het idee van de dobbelsteen even verruilen voor een vaas met ballen dan zouden we een $D_{2\frac{1}{2}}$ kunnen maken. Met het volgende procédé (zie figuur 2) krijgen we dan zelfs een hogere kans dan $\frac{2}{3}$ om te winnen. We geven deze nieuwe 'dobbelsteen' twee waarden die het rekenkundig gemiddelde zijn van de laagste, respectievelijk hoogste waarden van D_2 en D_3: $1\frac{1}{2}$ en $5\frac{1}{2}$ dus. Wanneer met kans p $1\frac{1}{2}$ getrokken wordt, dan heeft de gebeurtenis $5\frac{1}{2}$ kans $1-p$. De kans dat D_2 nu wint van $D_{2\frac{1}{2}}$ ($\mathbb{P}_1$) is gelijk aan $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}p$, terwijl de kans dat $D_{2\frac{1}{2}}$ van D_3 wint ($\mathbb{P}_2$) gelijk is

n	$\mathbb{P}(X=n)$	Winst(n)	$\mathbb{P}(X=n)\cdot$Winst(n)
0	$(\frac{5}{6})^3$	-1	$-\frac{125}{216}$
1	$\binom{3}{1}\cdot(\frac{5}{6})^2\cdot\frac{1}{6}$	1	$\frac{75}{216}$
2	$\binom{3}{2}\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot\frac{5}{6}$	2	$\frac{30}{216}$
3	$(\frac{1}{6})^3$	3	$\frac{3}{216}$
			$-\frac{17}{216}$

Figuur 1: n is het aantal keren dat na de worp met de drie dobbelstenen het door de speler opgegeven aantal ogen verschijnt. Winst(n) is de winst bij inzet 1 en score n.

	n_1	$\mathbb{P}(X=n_1)$	n_2	$\mathbb{P}(X=n_2)$
D_2	2	$\frac{2}{3}$	6	$\frac{1}{3}$
$D_{2\frac{1}{2}}$	$1\frac{1}{2}$	p	$5\frac{1}{2}$	$1-p$
D_3	1	$\frac{1}{2}$	5	$\frac{1}{2}$

Figuur 2: n_1 en n_2 geven het mogelijke aantal ogen aan dat met dobbelsteen D_i geworpen kan worden.



Figuur 3: boomdiagram van de winstmogelijkheden bij keuze *mkm* voor speler 1 en *mmk* voor speler 2.

aan $1-\frac{1}{2}p$. Het minimum van $\mathbb{P}_1$ en $\mathbb{P}_2$ is het grootst als ze gelijk zijn, hetgeen resulteert in $p=\frac{4}{7}$, en $\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2=\frac{5}{7}$. Dus een vaas met zeven ballen waarvan er vier de waarde $1\frac{1}{2}$ en drie de waarde $5\frac{1}{2}$ dragen maakt dat D_2 met kans $\frac{5}{7}$ wint van $D_{2\frac{1}{2}}$ en op haar beurt wint $D_{2\frac{1}{2}}$ met dezelfde kans van D_3. Merk op dat die kans zelfs groter is dan de oorspronkelijke $\frac{2}{3}$.
Herhaald toepassen van dit procédé resulteert in de limiet tot een winstkans voor speler twee van $\frac{7}{9}$. Helaas werkt de procedure niet in combinatie met D_1. Deze dobbelsteen hoeft niet geworpen te worden om haar winst of verlies vast te stellen. In die zin is ze constante in het spel. Bij een verzameling dobbelstenen waarin een dergelijke 'constante' niet voorkomt, en de winstkansen cyclisch strikt groter zijn dan $\frac{1}{2}$, kan met de geschetste procedure een nieuwe verzameling geconstrueerd worden waarin alle winstkansen tot $\frac{7}{9}$ kunnen toenemen. Door 'dobbelstenen' te gebruiken met meer dan zes vlakjes kan een dergelijke 'constante' worden vermeden.

Muntenrij

Het wordt natuurlijk pas echt leuk wanneer er geld aan te pas komt. Vandaar het volgende spel met als enige spelbenodigdheid een munt. Twee spelers kiezen een rijtje van drie van de symbolen 'kop' en 'munt' (volgorde in acht genomen). Om redenen die in de praktijk verduisterd dienen te worden kiest de ene speler pas na de andere. Vervolgens wordt er met de munt gegooid. De speler wiens rijtje van drie het eerste voorkomt wint het spel. Er wordt net zo lang doorgespeeld tot er iemand gewonnen heeft.
Een verstandige keuze van het rijtje kan de speler die als tweede mag kiezen in een voordelige positie plaatsen. Heel eenvoudig is dat in te zien indien speler 1 drie dezelfde karakters kiest, bijvoorbeeld: munt-munt-munt (we zullen munt hierna met m, en kop met k aanduiden). Een slimme keuze voor speler 2 is dan *kmm*: speler 1 heeft precies $\frac{1}{8}$ kans dat zijn rijtje *mmm* na drie keer gooien verschijnt. Komt er tijdens deze eerste drie worpen echter één keer een kop boven te liggen, dan is de kans voor de eerste speler verkeken: voordat er *mmm* geworpen kan worden, zal eerst *kmm* zijn verschenen. Dat betekent dat in alle gevallen anders dan *mmm* in de eerste drie worpen speler 2 wint. Met *kmm* heeft hij dus zeven keer zoveel kans om te winnen als zijn tegenspeler.
In de andere gevallen valt een soortgelijke redenering op te zetten waarin een boomdiagram goede diensten kan bewijzen. Stel bijvoorbeeld dat speler 1 *mkm* kiest; speler 2 neemt dan *mmk* als zijn rijtje (zie figuur 3). Vanuit het uitgangspunt is het eerste karakter voor bei-

den goed met kans $\frac{1}{2}$. Wanneer het eerste karakter niet *m* is kunnen we het spelletje opvatten alsof het van voren af aan begint. Valt echter eerst een munt, dan kunnen we drie gevallen onderscheiden. In geval 1 wordt vervolgens *km* gegooid met kans $\frac{1}{4}$. Eveneens met kans $\frac{1}{4}$ heeft echter geval 2 – *kk* – plaats, waarna we het spel weer kunnen behandelen als terug bij af. Onder geval 3 vallen alle andere combinaties: *mk*, *mmk*, *mmmk* etcetera, alle resulterend in winst voor speler 2. Deze laatste heeft dus een twee keer zo grote kans om te winnen als zijn tegenstander.
Wanneer speler 1 *mmk* kiest, kiest speler 2 *kmm*; mocht zijn tegenspeler voor *mkk* gekozen hebben dan kiest speler 2 voor *mmk*. U kunt op basis van analoge argumenten eenvoudig nagaan dat dit speler 2 respectievelijk 'n drie keer en 'n twee keer zo grote winstkans oplevert. Voor andere keuzen is op basis van symmetrie-argumenten nu voorzien. U kunt zelf narekenen hoe ver u uw winstkansen nog vergroot door een niet-zuivere munt in het spel te brengen. Wij zijn daar te eerlijk voor.

Literatuur

Martin Gardner
The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions
Simon and Schuster, New York, 1959

Martin Gardner
The 2nd 'Scientific American' book of mathematical puzzles and diversions
Simon and Schuster, New York, 1961

Martin Gardner
Martin Gardner's New mathematical diversions from Scientific American
Simon and Schuster, New York, 1966

Voortgezette Meetkunde in het profiel

Natuur en Techniek

Ervaringen op een volgschool

Leren redeneren

Cor Hofstra

Inleiding

Een blij weerzien met een oude bekende. Zo ervaren wij, docenten aan de Delta te Leeuwarden, één van de volgscholen in het Profi-project, het domein meetkunde uit de nieuwe wiskunde-B-programma's voor het profiel Natuur & Techniek in het vwo. Koordenvierhoeken, omtrekshoeken, middelpuntshoeken, de stelling van Thales, omgeschreven en ingeschreven cirkels, bijzondere lijnen in de driehoeken, het zijn allemaal onderwerpen die velen van ons nog met veel plezier hebben bestudeerd op de middelbare school en die enkelen nog tot 1968 hebben onderwezen. Ik herinner me overigens dat in de eerste edities van een methode als Moderne Wiskunde nog een paragraaf gewijd was aan de stelling van Thales en dat de concurrentie van de middelloodlijnen in een driehoek nog werd bewezen met behulp van de verzamelingentheorie in klas twee. Dat waren nog eens tijden. Langzaam verdwenen deze onderwerpen, die het wiskundeonderwijs nu juist zo plezierig maken, naar de achtergrond.

Euclidische meetkunde

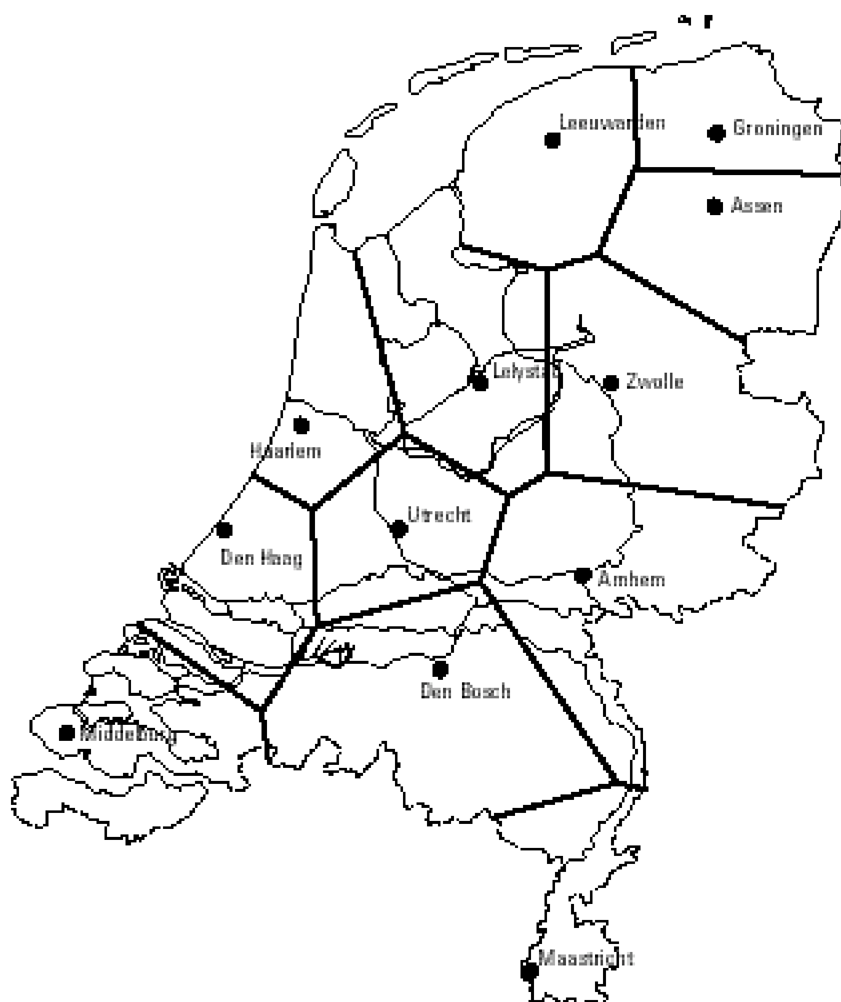
Maar niet getreurd. Ook bij de vakontwikkelgroep is kennelijk het besef gerezen dat de Euclidische meetkunde niet alleen heel leuk is, maar ook bijzonder handig om het deductieve redeneren te bevorderen. Vandaar dat er weer 120 studielasturen voor op het programma staan. Dus snel weer aan de slag met Gegeven, te bewijzen en bewijs. Natuurlijk zijn we dertig jaar later en dus zetten we 'klaar' onder het bewijs in plaats van q.e.d. Hoofddoel van het onderwijs in de voortgezette meetkunde is het redeneren. Het resultaat telt minder dan de redenering. Strikt genomen zouden we dan met de axioma's moeten beginnen, maar zover wordt er niet gegaan, er is immers niet voldoende tijd om al die leerstof opnieuw op te bouwen en wij willen de leerlingen vooral leren redeneren. Vandaar dat er een aantal stellingen als bewezen wordt beschouwd en we dus min of meer midden in de Euclidische meetkunde komen binnenvallen om ons partijtje mee te denken.

Voronoi

Op de volgscholen werken we met katernen die ontwikkeld zijn door het Freudenthal instituut, het is experimenteel materiaal dat nog niet helemaal is uitgekristalliseerd, hoewel men zijn voordeel heeft kunnen doen met de ervaringen van de eerste lichting experimenteerscholen. In deel 1 van de boekjes over voortgezette meetkunde begonnen de schrijvers met het onderwerp Voronoi-diagrammen. Een Voronoi-diagram is een tekening van een gebied dat is ingedeeld volgens het naaste-buurprincipe. Wanneer men een grens wil bepalen tussen twee gebieden, die elk een centrum hebben, dan kiest men die grens zodanig dat elk punt binnen het gebied dichter bij het eigen centrum ligt dan bij het naburige. Oplettende lezers zullen hier de middelloodlijn van de centra hebben herkend. De kunst is voor een leerling het effect van een nieuw toegevoegd centrum op het diagram te kunnen beredeneren.
In het kaartje op de volgende pagina ziet men in een Voronoi-diagram de herindeling van Nederland, uitgaande van de gedachte dat de provincie-hoofdsteden centra zijn. Een minder eenvoudige klus is bij gegeven grenzen de centra te bepalen, indien mogelijk. De leerling heeft hulp van een speciaal hiervoor ontwikkeld computerprogramma waarmee naar hartelust geëxperimenteerd kan worden en waarbij allerlei bijzondere gevallen - zoals de centra zijn collineair of de centra liggen op een cirkel - aan een nader onderzoek kunnen worden onderworpen. Er wordt natuurlijk een beroep gedaan op de zelfredzaamheid van de leerling bij zo'n computerprogramma. We willen graag dat de leerling zelf ontdekt wat nu een bijzonder geval is. Ook hopen we dat de leerling zo onderzoekend is dat hij of zij nagaat wat nu het effect op de grenzen is wanneer een centrum wordt toegevoegd binnen of juist buiten de omhulling (de omhulling is de figuur gevormd door de centra die het verst naar buiten liggen).

Docentsturing

Helaas is dat voor mijn leerlingen te veel gevraagd. Zij kunnen enige



sturing hierin niet missen en moeten toch geconfronteerd worden met kritische vragen van de docent. De computerpractica kunnen niet alleen buiten de contacturen gehouden worden. Er zullen anders te veel leerlingen zijn die er weinig van opsteken. Er moet minstens een surveillant zijn die weet wat de leerlingen behoren op te steken. Docenten hebben wel eens de neiging te denken dat leerlingen gemakkelijker omgaan met de nieuwe technologie dan zijzelf, wellicht juist, maar bij wiskundige programma's gaat het niet alleen om het hanteren van het programma, je moet ook weten waarnaar je zoekt.
Intuïtief wordt ook het afstandsbegrip ontwikkeld voordat het wordt gedefinieerd, maar dan is de tijd rijp voor de driehoeksongelijkheid. Het zal weinigen verbazen dat de leerlingen hier het fundamentele belang voor de meetkunde niet direct van inzien. Met een plaatje van de driehoek voor ogen zien ze het meer als het intrappen van een open deur. Ook hier is een taak voor de begeleider, zoals de docent schijnt te gaan heten, weggelegd.

Redeneren

Nu is het echt tijd voor wat minder intuïtie en begint het redeneren. Eerst nog eenvoudig met behulp van het afstandsbegrip bewijzen dat de drie middelloodlijnen door één punt gaan. Deze ex-opgave uit de onderbouw blijkt nog een lastige klus voor sommige vijfdeklassers. Zij zijn de redeneertrant echt niet meer gewend en willen graag gebruik maken van termen als 'vanzelfsprekend' en 'dat zie je toch aan de tekening'. Een bewijs voor alle gevallen wordt door de leerlingen nog niet echt gewenst. Uit het feit dat bij elke poging de middelloodlijnen inderdaad door één punt gaan menen zij te mogen destilleren dat dit ook altijd zo is. Een beroep op de logica vinden ze in dit stadium nog overdreven. Het is de docent die de logische redenering moet verdedigen vooral in deze beginfase van de formele aanpak, omdat de leerlingen echt nog moeten omschakelen. Wanneer het bewijs eenmaal is geleverd kan het programma Cabri goede diensten bewijzen. Met Cabri kan men een driehoek tekenen met daarin de bijzondere lijnen, en daarna de hoekpunten verplaatsen, waardoor de driehoek een andere vorm aanneemt. In de nieuwe driehoek zijn dan nog steeds de bijzondere lijnen getekend, waardoor je als het ware de eigenschappen van deze lijnen in een animatie kunt illustreren. Ook handig voor de docent om er nog wel op te wijzen dat op grond van de beelden ook nog slechts een vermoeden kan worden uitgesproken.

Koordenvierhoek

Na het afstandsbegrip is eerst de koordenvierhoek aan de beurt, ook weer om er mee te redeneren. Het blijft ook nu een lastige klus en in feite een kwestie van trainen op het nagaan of een vierhoek al dan niet een koordenvierhoek is en welke stellingen toegepast mogen worden.
Via de iso-afstandslijnen, die een vaste afstand hebben tot een gegeven gebied, komen we bij de van oudsher bekende onderwerpen als de eigenschappen van de bissectrices. Inmiddels worden er nu duidelijk stellingen geformuleerd op grond van voorgaande stellingen en behoorlijke definities. We komen op vertrouwd terrein. Er moet steeds meer aandacht besteed worden aan het behoorlijk opschrijven van het bewijs, voor velen toch een

onneembare barrière. Het leerlingmateriaal leidt hen gestaag langs alle stappen van de bewijsgang en de notatie, het is immers de bedoeling dat de leerlingen zelfstandig werken. Dat kan ook wel, maar naar mijn mening is het nodig dat de leerlingen met zekere regelmaat eens een opgave of een bewijs voorgedaan zien. Daar is echt niets mis mee. De docent kan de stappen toelichten en de leerling krijgt wat houvast. We kunnen zeker bij wiskunde B de leerlingen niet loslaten. De begeleiding en de zelfwerkzaamheid moeten met elkaar in balans zijn, het is de docent die de teugels pas kan laten vieren als hij zeker weet dat de leerling de goede kant op gaat.

Voortgezette meetkunde

Op dit moment werken onze leerlingen aan het tweede deel over voortgezette meetkunde. Hierin wordt er nog meer van hen geëist op het gebied van redeneren.

Het tweede deel begint met een overzicht van de meetkunde die bekend mag worden verondersteld en ook dat is voor de leraar een feest der herkenning, als de eigenschappen van driehoeken en vierhoeken de revue passeren en de congruentiegevallen in de vertrouwde notatie als ZHZ worden opgesomd. Ook hier wordt pijnlijk duidelijk dat de basisvorming nog niet een echte ondergrond lijkt te vormen voor de Tweede Fase. Veel van de begrippen zoals bijvoorbeeld de congruentiegevallen zijn voor de leerlingen niet echt duidelijk, snel een aantal gegevens combineren en een conclusie trekken is meestal te veel gevraagd. Aan de toelichting van deze bekende stof moesten de nodige lessen worden besteed.
Het leerlingenmateriaal is welwillend en probeert de leerlingen te begeleiden in het moeilijke proces van de redenering getuige onderstaand citaat uit het leerlingmateriaal als inleiding op de stelling van Thales die zegt 'Als van driehoek *ABC* hoek *C* recht is, dan ligt *C* op de cirkel met middellijn *AB*':

c Je hebt nu vast wel een *vermoeden* wat de vorm van deze banen is. Noteer dat vermoeden.

2 Laten we het geval van de rechte hoek eerst onder de loep nemen. We willen het vermoeden bewijzen en volgen het eerder gegeven stappenplan.

	redeneerstap	motivering
1:	$\angle DAB + \angle ADB + \angle B = 180°$	som hoeken in *DAB*
2:	$\angle ADB = 90°$	*AD* is hoogtelijn, gegeven
3:	$\angle DAB = 180° - 90° - \angle B = 90° - \angle B$	omrekenen uit 1: en 2:
4:	$\angle ECB + \angle CEB + \angle B = 180°$	som hoeken in *ECB*
5:	$\angle CEB = 90°$	*CE* is hoogtelijn, gegeven
6:	$\angle ECB = 180° - 90° - \angle B = 90° - \angle B$	omrekenen uit 4: en 5:
7:	$\angle DAB = \angle ECB$	regel 3 en 6.

a Maak een *tekening* van de situatie. Teken dus $\triangle PXQ$ rechthoekig. Je weet nu $\angle PXQ = 90°$. Dat mag je *gebruiken.*
Je vermoedt: *X* ligt op de cirkel met middellijn *PQ*. Dat moet je *bewijzen.*
Teken dus ook het midden van *PQ*.
b Nu het zoeken naar een *redenering.*
Twee associaties zijn mogelijk:
- Pythagoras ....
- Rechthoeken ....

c Noteer nu een *correct bewijs* voor de volgende stelling.

Het vinden van het begin van het verhaal is voor de leerlingen echter al een hele klus. Wanneer ik begin met een redenering treft mij het verwijt. 'U weet natuurlijk wel dat je met die driehoek moet beginnen, maar ik niet!' Het leren analyseren van een figuur is dan ook een proces wat vooraf moet gaan aan dit onderwerp. Het leerlingenboekje komt daaraan wel enigszins tegemoet door bijvoorbeeld erop te wijzen dat een complexe figuur opgebouwd is uit een aantal driehoeken die je er eerst uit moet lichten.

Ten slotte

Leerlingen kunnen met deze stof zeker wel zelfstandig oefenen, maar de onderwijzende kracht van de persoon voor de klas kan niet worden gemist. Het is van belang voor de technische studies in Nederland dat het profiel Natuur en Techniek voldoende leerlingen trekt. Van de leerling die dit profiel kiest wordt veel geëist, ook wat betreft voorkennis, de school moet daar een behoorlijke begeleiding tegenover zetten. Daar moeten we goed rekening mee houden wanneer de lessentabel wordt opgesteld. Want contacturen die nu worden geamputeerd, groeien er niet vanzelf weer aan.

Studielast en lesuren in de Tweede Fase

Kees Hoogland

Inleiding

Inmiddels zijn veel scholen bezig de examenprogramma's voor de Tweede Fase en de bijbehorende studielast te vertalen naar lesuren en roosters voor de eigen school.
Een veel gestelde vraag is of er geen standaardoplossingen zijn die de school gewoon kan gebruiken. Het antwoord daarop van vele kanten is steevast, dat de school eerst zelf een aantal keuzes moet maken over onder andere de plaats van het gemeenschappelijke deel, over de mogelijkheden om leerlingen korter of langer bij een te houden in één groep, et cetera, en dat daaruit natuurlijk verschillende roosters en studielastverdelingen kunnen voortvloeien. Ook de grootte van de bovenbouwafdeling kan sommige keuzes beïnvloeden.
In dit artikel worden een aantal oplossingen die scholen hebben gevonden naast elkaar gezet. Die vergelijken en kritisch bekijken kan het denken over oplossingen op de eigen school misschien vereenvoudigen. Omdat dit artikel alleen gaat over wiskunde is het ook mogelijk om de gekozen oplossingen te koppelen aan de examenprogramma's wiskunde met de vraag of daarbij mogelijke knelpunten optreden.
Uiteraard is veel dank verschuldigd aan de scholen die gereageerd hebben op de oproep in Euclides om hun (voorlopige) plannen ter beschikking te stellen.

De opzet van dit artikel

In eerste instantie wordt gekeken naar het vwo. Een aantal verdelingen van blokken van 40 uur over de jaren 4,5 en 6 worden gepresenteerd.
Vervolgens worden ook enkele plannen voor de vertaling naar contacturen vermeld.
Daarna wordt hetzelfde gedaan voor de havo.

Leerlingstromen in 4 vwo

Het grote dilemma voor 4 vwo is, of je alle leerlingen bij een houdt, twee stromen maakt, of de stroom C&M direct al apart zet.
De scholen A en B, waarvan de tabellen hiernaast staan, hebben er voor gekozen om de C&M-stroom al direct in 4 vwo een ander programma te geven dan de andere stromen. Een voordeel is dat deze leerlingen een veel evenwichtiger programma over de drie jaar hebben. Een nadeel is dat deze groep al snel apart zit en dus ook al snel heeft moeten kiezen.
Veel scholen kiezen er ook voor halfjaarroosters te maken. Dan kan zo'n C&M-stroom mogelijk een half jaar nog wel gecombineerd worden met de E&M-stroom.
De scholen C en D maken twee stromen: een Maatschappij-stroom en een Natuur-stroom. Opvallend is ook school F. Die heeft blijkbaar de keuze gemaakt om én de leerlingen in 4 vwo bij elkaar te houden én de C&M-leerlingen toch nog een redelijke verdeling over jaren te geven. Dat kost wel extra lessen. Maar er staat natuurlijk nergens in de wet dat dit niet mag.

Dit is eigenlijk voor het eerst dat ik een school zie afwijken van een soms toch wat rigide uniforme verdeelsleutel voor alle vakken, alle niveaus en alle stromen.

De omvang in 4 vwo

Scholen maken ook verschillende keuzes voor de omvang van het wiskundeprogramma in 4 vwo. De geringste omvang ziet u bij school C. Dit is een fictieve school uit het zeer recent verschenen APS-boekje 'Uren roosteren in de Tweede Fase' van Hickendorf en Verhulst *)
Dit betekent dat de leerlingen in 5 en 6 vwo natuurlijk flink veel wiskunde-uren hebben. Bij N&T iets in de orde van grootte van 5 + 5, en bij E&M iets van 4 + 4.
Dat zou wel eens effectief kunnen zijn, omdat dan de leerlingen natuurlijk al behoorlijk voorgesorteerd zijn. Dat kost voor de school ongetwijfeld meer wiskundedocent-uren, maar dat vinden wij natuurlijk helemaal niet erg.
School H zet al een heel groot stuk wiskunde in 4 vwo. Die keuze heeft eigenlijk alleen voor de C&M-stroom, inhoudelijk gezien, een nadeel. Het zou kunnen betekenen dat deze leerlingen in 4 vwo veel en behoorlijke lastige wiskunde krijgen (denk aan: hellinggrafieken, rijen, logaritmen, exponenten, etc.) en vervolgens in 5 en 6 vwo een heel klein programma met statistiek en

Blokken vwo

School A

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	3	5	5	5
5v	3	5	5	7
6v	3	5	5	7
totaal	9	15	15	19

School B

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	4	6	6	6
5v	3	5	5	7
6v	2	4	4	6
totaal	9	15	15	19

School C: 'Uren roosteren ...')'

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	3	3	4	4
5v	3	6	5	7
6v	3	6	6	8
totaal	9	15	15	19

School D

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	5	5	7	7
5v	2	5	4	6
6v	2	5	4	6
totaal	9	15	15	19

School E

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	4	4	4	4
5v	3	6	6	8
6v	2	5	5	7
totaal	9	15	15	19

School F

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	5	5	5	5
5v	4	4	4	4
6v	(2)	6	6	10
totaal	9(2)	15	15	19

School G

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	5	5	5	5
5v	2	4	5	5
6v	2	6	5	9
totaal	9	15	15	19

School H

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	6	6	6	6
5v	1,5	4	5	7
6v	1,5	5	4	6
totaal	9	15	15	19

Lesuren vwo

School P

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	2	3	3	3
5v	1	2	2	3
6v	1	2	2	3
totaal	4	7	7	9

School Q: 'Uren roosteren ...')'

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	2	2	3	3
5v	2	4	3	5
6v	2	4	4	5
totaal	6	10	10	13

School R

	C&M	E&M	N&G	N&T
4v	4	4	4	4
5v	1	3	4	5
6v	2	4	3	5
totaal	7	11	11	14

Vwo-kaart

Onderdeel	C&M	E&M	N&G	N&T
Functies en grafieken	100	100	100	100
Discrete analyse	40	40	40	40
Combinatoriek en kansrekening	100	100	100	100
Meetkunde		40	40	40
Diff. rek. met toepassingen		80		
Statistiek en kansrekening	80	80		
Grafen en matrices	40	40		
Discrete dynamische modellen		40		
Lineair programmeren		40		
Diff.- en int.-rekening			120	120
Goniometrische functies			40	40
Continue dynamische modellen			40	40
Normale verdeling en toetsen			40	40
Niet ingevuld			40	
Voortgezette meetkunde				120
Voortgezette analyse				80
Zebra		40	40	40
Totaal	360	600	600	760

kansrekening. In dat gering geprogramma moeten echter ook de praktische opdrachten gedaan worden en moet voorbereid worden op een examen dat gaat over ……?

Interessante vraag overigens: Hoe zal zo'n examen wiskunde A1 er eigenlijk uit gaan zien? Waar zal de nadruk op liggen bij de toetsing? Vast niet op rijen en logaritmen? Toch?

Wiskunde B1 en B2 naast elkaar

Wiskunde B2 bestaat uit 120 uur voortgezette meetkunde en 80 uur voortgezette analyse. Uit de naamgeving zou je kunnen vermoeden dat er iets wordt voortgezet. Voor voortgezette meetkunde is echter strikt genomen weinig voorkennis vereist. Voor voortgezette analyse zal wel al een flink deel van de analyse uit wiskunde B1 gedaan moeten zijn.
(Bekijk maar eens het examen-programma uit Euclides 73-2.)
De scholen F en G zetten vier blokken B2 in 6 vwo. Een voordeel is dat deze leerlingen dan al heel veel wiskunde hebben gehad voordat ze aan B2 beginnen. Een nadeel is dat deze N&T-leerlingen in een kort examen jaar misschien wel 6 lesuren wiskunde hebben.
Andere scholen zetten in 5 en 6 vwo steeds twee blokken B2 naast het programma voor B1. De inhoudelijke consequentie daarvan is dat er in die uren begonnen moet worden met voortgezette meetkunde en misschien moet dat vrij lang achtereen behandeld worden. Te hopen valt dat die voortgezette meetkunde een beetje te behappen is voor prille 5V-leerlingen. Als dat niet zo is, kunnen we de N&T-stroom over een aantal jaar wel opdoeken.

Misschien bent u het spoor bijster, omdat er bij een programma wiskunde B2 van 200 slu steeds gepraat wordt over 4 blokken. Dat heeft te maken met die mysterieuze 40 slu van N&G die ingeboekt staat als *niet ingevuld*.

Lesuren in vwo

Regelmatig hoor ik scholen onderling omrekenfactoren uitwisselen. Ook dat geeft soms wat spraakverwarring. Sommige hanteren een omrekenfactor naar docenttijd, andere een omrekenfactor naar lesuren van 50 minuten. Misschien helpt het volgende tabelletje, met de meest voorkomende manier van omrekenen:

slu	100
docenturen	62,5
lesuren 50 m.	75
lesuren 45m.	83,3

Steeds wordt uitgegaan van 40 lesweken. Dus bijvoorbeeld een profiel van 600 slu over 3 jaar geeft 450 lesuren van 50 minuten over drie jaar. Op weekbasis is dat ruim 11 uur over 3 jaar. Dat zie je terug bij school R.
Een andere manier van rekenen is: Een profiel van 600 slu verdeel je over drie jaar: 120, 240, 240 slu. Daarbij horen 90, 180, 180 lesuren. Per week is dat 2,25; 4,5; 4,5. Afgerond 2, 4, 4. Dat zie je bij school Q.
Uiteraard kiezen scholen vervolgens, hoe bijvoorbeeld de lesuren weer verdeeld worden in instructie-uren, werkgroepuren, zelfwerkuren et cetera. De scholen P en R laten uitersten zien. Bij school P blijft er veel flexibel in te zetten docenttijd over, maar zijn er weinig uren in vast klassikaal verband. Bij school R is in extreme mate de docenttijd gekoppeld aan leerlingenstroom en vak.
Het is maar waar uw school voor kiest. School Q is de voorbeeldschool uit het eerdergenoemde boekje 'Uren roosteren in de Tweede Fase' *)

Havo wiskunde A1

Havo wiskunde A1 wordt afgesloten met een schoolexamen en niet met een centraal examen. De eerste vraag die beantwoord moet worden is of deze afronding plaatsvindt aan het eind van 4 havo of in 5 havo.
De scholen K en M denken hier verschillend over. Ik krijg de indruk dat de keuze van school K het meest nagevolgd zal worden

Leerlingenstromen in havo

Ook voor de havo moet gekozen worden hoe lang de leerlingen nog bij elkaar zitten. Ook hier zijn drie varianten:
- School K: in 4 havo allemaal bij elkaar houden;
- School L: een Natuur- en een Maatschappij-stroom maken.
- School M: direct een N&T-stroom maken.

Bij school M zou je je nog kunnen voorstellen dat de leerlingen het eerste halfjaar nog bij elkaar zitten en dat de N&T-leerlingen in het tweede halfjaar 3 blokken extra wiskunde krijgen.
De variant van school L is inhoudelijk ernstig af te raden, maar daarover later meer.

Wiskunde B2 naast B1

Bij de havo is sprake van een steeds terugkerende spraakverwarring. Veel schoolleidingen en roosteraars denken dat B1 + B2 = B12. Op zich geen onredelijke veronderstelling: het geldt alleen niet voor havo wiskunde B.
Hier geldt namelijk: Wiskunde B1 is 320 slu, wiskunde B12 is 440 slu, de overlap is slechts 240 slu. In blokken: Wiskunde B1 is 6 + 2 en wiskunde B12 is 6 + 5. School L heeft dat zo ook geroosterd. Dat heeft als groot nadeel dat de N&G-leerlingen in 5 havo waarschijnlijk alleen maar bezig

zijn met Kansrekening en Statistiek. Ze moeten daarna echter wel examen doen over het hele programma. Specifiek in wiskunde B12 zit Ruimtemeetkunde 2 (80 slu) en Toegepaste analyse 2 (120 slu).
Deze kunnen niet zomaar naast B1 gezet worden. Er zullen ten minste een aantal onderdelen uit Toegepaste analyse 1 en Ruimtemeetkunde 1 gedaan moeten zijn om hier succesvol aan te kunnen werken. Bij school M zal het nog flink wat kunst- en vliegwerk vereisen om dat vorm te geven met de leerstof uit de schoolboeken.

Lesuren in de havo

Wat de lesuren betreft laten de scholen X en Z weer de uitersten zien waartussen gekozen kan worden.
De variant van school Y kiest wat alles betreft een gulden middenweg. Redelijk aantal uren, in 4 havo kunnen de leerlingen nog bij elkaar zitten, wiskunde A1 wordt afgerond aan het eind van 4 havo, de specifieke delen van wiskunde B1 en wiskunde B12 worden in 5 havo naast elkaar gedaan samen met gemeenschappelijke onderdelen.

Tot slot

Ik hoop dat deze voorbeelden kunnen bijdragen tot de vormgeving van het wiskundeonderwijs in de Tweede Fase op uw school.

Noot

* *Hickendorf G. & Verhulst J.* (1998)
Uren roosteren in de Tweede Fase
Te bestellen (ƒ 29,50) bij :
APS-VODA
Postbus 85475
3508 AL Utrecht
schriftelijk o.v.v. nr. 400.062

Blokken havo

School K

	C&M	E&M	N&G	N&T
4h	4	4	4	4
5h	0	3	4	7
totaal	4	7	8	11

School M

	C&M	E&M	N&G	N&T
4h	3	3	3	4,5
5h	1	4	5	6,5
totaal	4	7	8	11

Lesuren havo

School X

	C&M	E&M	N&G	N&T
4h	1,5	1,5	2,5	2,5
5h	0,5	2	1,5	3
totaal	2	3,5	4	5,5

School Y : 'Uren roosteren ...*)'

	C&M	E&M	N&G	N&T
4h	3	3	3	3
5h	0	2	2	4
totaal	3	5	5	7

School Z

	C&M	E&M	N&G	N&T
4h	3	3	3	3
5h	0	2	3	5
totaal	3	5	6	8

Havo-kaart

Onderdeel	C&M	E&M	N&G	N&T
Tellen en kansen	40	40	40	40
Veranderingen	40	40	40	40
Statistiek	40	40		
Verbanden	40	40		
Toegepaste analyse (A)		80		
Binomiale verdeling		40		
Toegepaste analyse 1 (B)			120	120
Ruimtemeetkunde 1			40	40
Kansrekening en statistiek			80	
Ruimtemeetkunde 2				80
Toegepaste analyse 2 (B)				120
Totaal	160	280	320	440

Een oud probleem

F. van der Blij, A.G. van Asch

In deel 1, jaargang 1 van het Wiskundig Tijdschrift, onder redactie van F.J. Vaes, Chr. Krediet en Dr. N. Quint, uit 1904, staat het volgende:

Vraag 30. De volgende vormen zijn door $a + b + c$ *deelbaar:*

$a + b + c$
$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$
$a^5 + b^5 + c^5 + 5abc(ab + ac + bc)$
$a^7 + b^7 + c^7 - 7abc(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$

Er schijnt een algemene gedaante voor deze en soortgelijke door $a + b + c$ *deelbare vormen te bestaan.*

Deze is niet $\sum a^{2n+1} + (2n+1)(-1)^n abc \sum b^{n-1}c^{n-1}$*, want de tweede vorm is niet* $\sum a^3 - 3abc \sum b^0c^0$*, maar* $\sum a^3 - abc \sum b^0c^0$*. De eerste vorm kan wel onder deze gedaante gebracht worden, als men hem verdubbelt. De volgende (5de) vorm, nl.* $\sum a^9 + 9abc \sum b^3c^3$ *blijkt echter bij onderzoek niet deelbaar te zijn door* $a + b + c$*. De algemeene gedaante is ook niet* $\sum a^{2n+1} + (2n+1)(-1)^n abc(\sum bc)^{n-1}$*. De 2de en de 3de vorm zijn wel van die gedaante. De 4de ook, indien men er* $14a^2b^2c^2(a + b + c)$ *aftrekt. De 1ste echter niet. Ook blijkt de volgende vorm* $\sum a^9 + 9abc(\sum bc)^3$ *weer niet deelbaar te zijn door* $a + b + c$*.*
Welke is de algemeene gedaante dezer vormen?

(Dit stukje was ondertekend met “Zero”)

In de daarop volgende jaargangen van het Wiskundig Tijdschrift troffen we geen nadere oplossing, maar we hebben niet alles systematisch nagezocht.

Wij vragen ons af of er lezers van Euclides zijn die zich eens op dit probleem zouden willen werpen. Het lijkt geen puzzle die met alleen maar gezond verstand op te lossen zal zijn. Wellicht heeft men er iets meer dan de gewone schoolwiskunde voor nodig, maar al te geleerde theorieën zullen toch wel niet nodig zijn. Bestaan er analoge formules voor $n = 9$, of alleen maar voor priemgetallen, dus voor 11, 13, etcetera? Is er iets analoogs met even exponenten?

Graag zien wij reacties van lezers van Euclides tegemoet. Dit kan zijn een enkele opmerking, een verwijzing, een oplossing van een deelprobleem, een artikel rond dit probleem. Wij stellen ons voor de binnengekomen reacties te verwerken tot een wiskundig artikel in Euclides, met uiteraard liefst een zo gevarieerd mogelijke inbreng van de lezers. De uiterste inzenddatum is drie maanden na verschijnen van dit blad.

Inzendingen kunnen gestuurd worden naar

A.G. van Asch
Fac. Wiskunde en Informatica
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513
5600 MB Eindhoven

Tweede Fase

Laatste nieuws Examenprogramma's uit UITLEG

- Praktische opdrachten 40% van cijfer schoolexamen (Zie ook, Euclides 73-6 p. 199). Dit geldt voor leerlingen met examenjaren: vwo 2001, 2002, 2003, havo 2000, 2001, 2002.
- Praktische opdrachten 30% van cijfer schoolexamen havo wiskunde A1 en dus ook van eindcijfer.
- In het examenprogramma zullen *geen* voorschriften staan voor het aantal en de omvang van de praktische opdrachten die meetellen voor het schoolexamen. Scholen krijgen hierin dus veel vrijheid.
- In het examenprogramma zal hoogstwaarschijnlijk komen te staan: 'De leerlingen dienen op het examen te beschikken over een grafische rekenmachine'.
- Binnenkort worden de officiële examenprogramma's naar de scholen gestuurd.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Van de bestuurstafel

Leerwegen in vbo/mavo
Begin februari is het wetsvoorstel voor de leerwegen mavo, vbo, vso, leerwegondersteunend onderwijs en praktijkonderwijs door de Tweede Kamer aanvaard. In vergelijking met de oorspronkelijke opzet zijn er een aantal wijzigingen. Van meerdere kanten is op de plannen van de staatssecretaris kritiek geleverd, niet in het minst door de Onderwijsraad. Ook het bestuur heeft op de voorstellen tot aanpassing van de examens een uitgebreide brief geschreven (zie Euclides 72-8, p.312-316). Het gevolg is dat er nog het een en ander bekeken moet worden en dat mede hierdoor de invoering is verschoven naar 1 augustus 1999. Even een adempauze, zouden we kunnen denken. Maar laten we de tijd van de adempauze goed gebruiken en niet met de armen over elkaar gaan zitten wachten op de dingen die komen.
De werkgroep vbo/mavo van het bestuur zal zich dienen te bezinnen op een reactie naar de staatssecretaris over de aanpassing van de examens en de wijze waarop de examinering zal plaatsvinden, alsmede de wijze waarop er binnen het wiskundeonderwijs aandacht zal moeten zijn voor de zwakke leerling.

Leerwegondersteuning in vbo/mavo
Zoals u weet zal de invoering in 1999 het leerwegondersteunend onderwijs met zich mee brengen. Doel van dit leerwegondersteunend onderwijs is om leerlingen met partiële achterstanden of een tijdelijke problematiek te brengen tot het volgen van het reguliere programma. Hetzij in de vorm van een echt diploma, hetzij in de vorm van een schriftelijk bewijs, vroeger certificaat genoemd. Dit leerwegondersteunend onderwijs zal de zwakke leerling de mogelijkheid moeten bieden om door ondersteuning zijn of haar weg te vinden naar het secundair beroepsonderwijs via de zogenaamde basisvariant beroepsgericht onderwijs.
Dat brengt ons tot de vraag wat we met de leerstof aan moeten als het om deze leerlingen gaat. Als het gaat om de kennis en vaardigheden die nodig zijn, voldoen dan de huidige methoden? Of moeten we wellicht ter aanvulling of ter vervanging naar meer thematisch onderwijs? Of is het nodig om juist voor deze leerlingen te zoeken naar wegen om meer samenhang aan te brengen tussen de vakken? Wellicht is het mogelijk om dit laatste met het voorgaande te combineren. Het zijn nu allemaal nog vragen. Vragen over hoe het zal gaan met het wiskundeonderwijs in het leerwegondersteunend onderwijs. Niet slechts vragen over de inhoud, maar ook vragen die te maken hebben met de aanpak van de verschillen in problematiek en achterstanden.

SLO-project
Het bestuur heeft zich reeds in een vroeg stadium bovenstaande problematiek gerealiseerd. Met de SLO is een project afgesproken om te onderzoeken wat de mogelijkheden zijn. In overleg met het bestuur is een route bedacht om een aantal deelaspecten van deze problematiek in kaart te brengen.
In elk geval is het bestuur ervan overtuigd dat aan deze leerlingen een geweldige dienst bewezen wordt als we landelijk alle krachten bundelen om te komen tot een verantwoorde inrichting van ons wiskundeonderwijs. Uit recent onderzoek immers valt af te leiden dat het examenprogramma niet haalbaar is voor veel vbo-leerlingen. Welke leerlingen vallen uit de boot als het gaat om de toegang tot het kmbo? Vandaar dat inzichtelijk gemaakt moet worden wat de inhoud dient te worden van de leerwegondersteuning. We houden u op de hoogte van de ontwikkelingen.

Wim Kuipers

Vragen over de tweede fase
Nu de concrete invulling van de tweede fase naderbij komt, wordt duidelijk dat nog niet alles duidelijk is. Een vraag die ons regelmatig gesteld wordt is of er in het nieuwe examenprogramma voor wiskunde wel rekening is gehouden met toetsing en training, omdat alle veertigvouden van de diverse onderwerpen in het programma bij elkaar geteld juist de complete studielast is. Voor zover ons bekend is aan alle vakontwikkelgroepen indertijd verteld dat het aantal uren studielast per vak een brutogetal was, all-in, dus inclusief alles. In onze reactie op het eerste concept hebt u gelezen dat wij (en wij niet alleen) het voorgestelde wiskundeprogramma op een aantal punten overladen vonden. Op basis van die reacties is in de oorspronkelijke plannen daarna nog het nodige geschrapt. De ruimte voor toetsing en training zit er dus in, maar uiteraard zal slechts de toekomst leren in hoeverre de ingeschatte tijd ook de werkelijke tijd zal zijn.

Marian Kollenveld

Examenbesprekingen in mei 1998

VBO-B dinsdag 19 mei 1998
van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
ALKMAAR	
OSG Willem Blaeu Robonsbosweg 11 072-5122477	Mw. T. Dekker 0299-371226
GRONINGEN	
Zernike College Bordewijklaan 34 050-5266866 (station buslijn 5)	Hr. B.C. Hoekstra 050-4063061
's HERTOGENBOSCH	
Ds. Pierson College G. ter Borchstraat 1 073-6442929 (NS Den Bosch OOST)	Mw. M. Lambriex- van der Heijden
ST. ANNAPAROCHIE	
CSG Ulbe van Houten Steven Huygenstraat 4 0518-401447 (NS Leeuwarden bus 70; 30 min)	Hr. A.J. Tobi 0518-403229

VBO/MAVO-C/D maandag 25 mei 1998
van 15.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
ALKMAAR	
OSG Willem Blaeu Robonsbosweg 11 072-5122477	C: Mw. C.E. Gaykema 020-6131802 D: idem
AMSTERDAM	
CSG Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 (tramlijn 3, 5, 12, 16, 24)	C: Hr. M. Westland 020-4421797 D: idem
GRONINGEN	
Zernike College Bordewijklaan 34 050-5266866 (station buslijn 5)	C: Hr. S.A.K. Kooiman 050-5251289 D: Hr. J. Rijnaard 050-5254709
's HERTOGENBOSCH	
Ds. Pierson College G. ter Borchstraat 1 073-6442929 (NS Den Bosch-OOST)	C: mw. M. Lambriex- van der Heijden D: idem
ROTTERDAM	
Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	C: Hr. W. de Jager 0184-683829 D: Mw. I. Dalm-Hof
ST. ANNAPAROCHIE	
CSG Ulbe van Houten Steven Huygenstraat 4 0518-401447 (NS Leeuwarden bus 70; 30 min)	C: Hr. A.J. Tobi 0518-403229 D: Hr. B.C. Hoekstra 050-4063061
ZEIST	
KSG De Breul Arnhemsebovenweg 98 030-6915604	C: Hr. R.J. Roukema 0346-560429 D: idem
ZWOLLE	
Thorbecke SG Dr. C.A. van Heesweg 1 038-4564560	C: Hr. R. Kronenberg 038-4210044 D: idem

Herinnering

Heeft u het *formulier* al teruggestuurd waarmee ons ledenbestand wordt bijgewerkt?
Zo niet, … graag **NU** doen!

Bestuur NVvW

HAVO-A woensdag 20 mei 1998
van 16.00 - 18.00 uur

HAVO-B vrijdag 29 mei 1998
van 16.00 - 18.00 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT	
De Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	A: Hr. P.M.G.M. Kop 0182-529474 B: Hr. W.A.M. van Bunnik 030-2517946
AMSTERDAM	
CSG Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 (tramlijn 3, 5, 12, 16, 24)	A: Hr. S.T. Min 0229-237756 B: Hr. J.P. Muthert 020-6253065
ARNHEM	
Thomas à Kempiscollege Th. à Kempislaan 25 026-4452447	A: Hr. J.M. de Geus 0575-521442 B: Hr. A.T. Sterk 055-3666466
GOES	
Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	A: Mw. C.M. de Bokx 0118-638551 B: Hr. B. Dorssers 0113-230350
's GRAVENHAGE	
Hofstad Lyceum Colijnplein 9 070-3687670	A: Hr. B. de Jong 079-3213517 B: Hr. C.D. Hendriks 0174-620131
GRONINGEN	
Röling College Melisseweg 2 050-5474141	A: Mw. H. Lüder 050-5340695 B: Hr. J. Tolboom 050-5776928
's HERTOGENBOSCH	
Ds. Pierson College G. ter Borchstraat 1 073-6442929 (NS Den Bosch-OOST)	A: Hr. H.J. Kruisselbrink 073-5216386 B: Hr. C.J.M. Nienhuis 0411-678501
ROTTERDAM	
Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	A: Hr. R.E. Houweling 0180-315302 B: Hr. H.R.K.T. Hillebrand 0180-523552
ZWOLLE	
Van der Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	A: Hr. G. Roorda 038-4658493 B: Hr. J.P. Scholten 053-4768791

VWO-A maandag 25 mei 1998
van 16.00 - 18.00 uur

VWO-B woensdag 20 mei 1998
van 18.30 - 20.30 uur

Plaats	*Gespreksleider*
AMERSFOORT	
De Amersfoortseberg Hugo de Grootlaan 25 033-4618845	A: Hr. E. Schimmel 0342-472123 B: Hr. F.W. Zwagers 033-4752341
AMSTERDAM	
CSG Sweelinck College Moreelsestraat 21 020-6625697 (tramlijn 3, 5, 12, 16, 24)	A: Hr. A. Holleman 0251-654913 B: Mw. G.W. Fokkens 020-6438447
ARNHEM	
Thomas à Kempiscollege Th. à Kempislaan 25 026-4452447	A: Mw. E.M.H. van den Berg 024-3551414 B: Hr. H. Rutten 024-3240637
GOES	
Buys Ballot College Bergweg 4 0113-213010	A: Hr. A. Ruijgt 0113-343963
's GRAVENHAGE	
Hofstad Lyceum Colijnplein 9 070-3687670	A: Hr. J.P.C. van der Meer B: Hr. R.J. Klinkenberg 070-3559938
GRONINGEN	
Röling College Melisseweg 2 050-5474141	A: Hr. L. Tolboom 050-3146093 B: Mw. H. Lüder 050-5340695
's HERTOGENBOSCH	
Ds. Pierson College G. ter Borchstraat 1 073-6442929 (NS Den Bosch-OOST)	A: Hr. W.J.M. Laaper 040-2867720 B: Hr. A.L.P. van Merode 0162-313746
ROTTERDAM	
Chr. College Henegouwen Henegouwerplein 16 010-4774533	A: Hr. C. Rijke 078-6194286 B: Hr. B.L.G.P. Hillebrand 0180-515210
ZWOLLE	
Van der Capellen SG Lassuslaan 230 038-4225202	A: Mw. A. Breeman 038-4539985 B: Hr. L.H. Rietveld 055-5419287

Wiskunde voor iedereen in semester 4 van het mto

Michel van Glabbeek

Inleiding

Het nieuwe leerplan wiskunde, zoals dit in augustus 1997 ingevoerd is in het mto niveau 4 (de oude MTS), beslaat slechts drie van de vier semesters van de eerste twee leerjaren. Als de leerling dit met succes afrondt heeft hij het wiskundedeel van het basiscertificaat AVO behaald. In het vierde semester kunnen leerlingen die door willen stromen naar het hto hun wiskunde alvast verdiepen met het oog op het laatste theoretische jaar. Voor de overige leerlingen is niet voorzien in wiskundeonderwijs [1)]

Commissie

Afgezien van de verminderde werkgelegenheid kunnen we ons afvragen of dit wel een wenselijke situatie is. Een zware commissie uit onder andere het BVE-veld en uit het hto [2)] zegt duidelijk nee. Sterker nog, in het rapport dat de commissie onlangs liet verschijnen, doet zij allerlei aanbevelingen om het gat in semester vier voor alle leerlingen te dichten.
De commissie signaleert een dalend niveau van instromers in het mto. De naderende reorganisatie van het vbo en mavo zal meer leerlingen toelatenswaardig laten worden met een niveau dat hooguit het huidige C-niveau zal halen. Het leerplan is voor leerlingen met D-niveau geschreven. Dit gaat natuurlijk wringen.

Leerplan

Zoals het leerplan al vermeldt adviseert het rapport om leerlingen met een te lage instroom een semester lang een schakelprogramma te laten doorlopen. De normale leerstof zou dan een semester op kunnen schuiven zodat het tweede leerjaar volledig gevuld is.
Een andere groep leerlingen die niet voorschakelt kan het overkomen dat het basisprogramma niet in de voorgeschreven tijd wordt afgerond. Deze groep kan semester vier gebruiken om de schade te herstellen.
Dan is er nog de groep die het wel lukt om het programma in drie semesters te voltooien maar geen plannen heeft om naar het hto te gaan. Deze leerlingen kunnen zich voorbereiden op de beroepspraktijk door hun wiskundige kennis en vaardigheden te verbreden. De commissie heeft hiervoor interessante eindtermen bedacht met ruimte voor open problemen in technische contexten met gebruik van ICT-middelen. Tevens doet de commissie aanbevelingen om de vigerende eindtermen te verfijnen op basis van drie niveaus: algemene vaardigheden, vakvaardigheden en specifieke vaardigheden.

Ten slotte

Als u dit leest zijn uw directeur en coördinator wiskunde al in bezit van dit rapport. Ik adviseer u dringend om uw directie te overtuigen van het nut van de genoemde aanbevelingen, kortweg samen te vatten als:

Wiskunde voor iedereen in semester 4!

Noten

1 Het leerplan vermeldt de mogelijkheid om toelatingswaardige leerlingen met wiskundedeficiënties in het eerste semester een schakelprogramma aan te bieden.

2 In de commissie waren vertegenwoordigd: leden van het TWIN-consortium, het LICA, de examencommissie Wiskunde en Natuurkunde van het mto, en verder vertegenwoordigers van CEVO en het BVE- en hbo-veld. Het rapport kwam tot stand na raadpleging van voorzitters van de BTG-en van de BVE-raad.

Redactie Euclides

Bert Zwaneveld neemt afscheid

*De redactie *)*

Inleiding

Half april houdt de redactie van Euclides altijd een redactievergadering. Op die vergadering vinden traditiegetrouw de wisselingen in de redactie plaats.
Redacteuren worden in principe benoemd voor een periode van vier jaar. De meeste redactieleden maken meerdere van zulke termijnen vol.
Dit jaar was er slecht één wijziging. Echter wel een ingrijpende wijziging voor de redactie van Euclides: het vertrek van Bert Zwaneveld.

Voorzitter en hoofdredacteur

In het najaar van 1976 verschijnt Bert als voorzitter van de redactie in het colofon. In nummer 3 van de jaargang 1976-1977 wordt hij aangekondigd als de opvolger van G. Krooshof (kortweg 'Kroos'). Destijds was er geen functioneel verschil tussen *voorzitter van de redactie* en *hoofdredacteur*. Per traditie stond het blad *onder leiding van* iemand. De eerste 25 jaar stond Euclides onder leiding van Wijdenes en Schogt, daarna kwamen Streefkerk, Mooy, Wansink en Krooshof.
Vanaf het najaar van 1976 gaf Bert dus leiding aan Euclides. In het colofon heette hij: voorzitter. Vanaf de jaargang 1981-1982 heet te hij: hoofdredacteur. Deze benaming verscheen voor het eerst. De functie veranderde er niet zozeer door. Wel werd het accent op de inhoud van Euclides gelegd.
In het februari-nummer van 1983 wordt Bert uitgeluid. Het stukje waarin dat gebeurt is kort en bondig, en in dat stukje wordt Bert geprezen vanwege het kort en bondig zijn. Bert wordt ook geprezen vanwege de vriendschap die hij met zich meebrengt.
Later, in 1987, is er een functionele scheiding aangebracht tussen de voorzitter en de hoofdredacteur. Nog weer later is dat vastgelegd in een redactiestatuut. Men zou kunnen zeggen: de voorzitter geeft leiding aan de redactie, en de hoofdredacteur geeft leiding aan het tijdschrift. Zonder nauwe samenwerking kan zoiets natuurlijk niet. Tegelijk zouden zij elkaar, indien nodig, kunnen vervangen, zodat de continuïteit van het blad beter gewaarborgd werd. In de jaren tussen 1983 en 1987 was het besef gegroeid dat de continuïteit niet automatisch verzekerd was.

Voorzitter nieuwe stijl

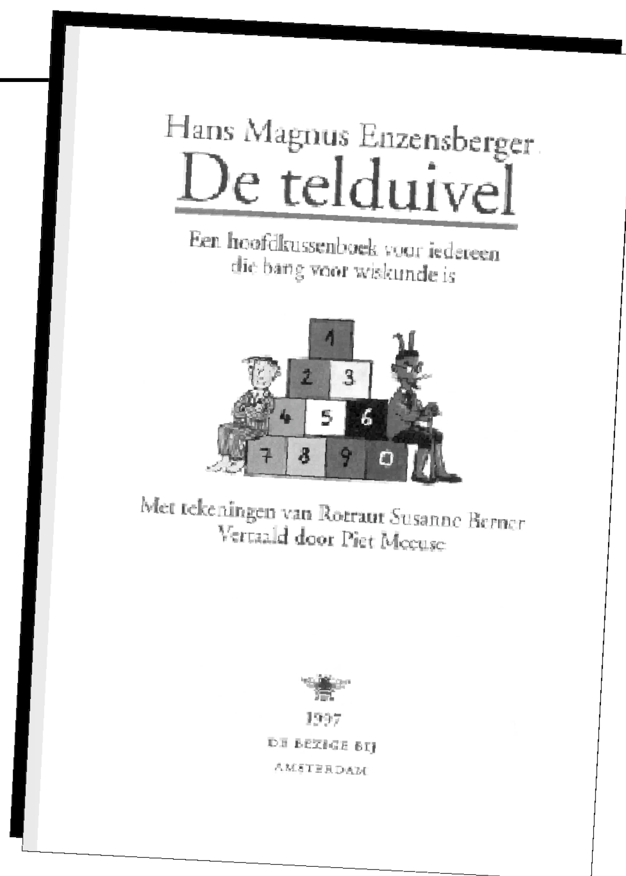
In 1991 verschijnt Bert weer in beeld, nu als voorzitter naast een hoofdredacteur. Bert leidinggevend aan de redactie. Als altijd geïnteresseerd in het wiskundeonderwijs, maar zich zeer bewust van de scheiding in bovengenoemde functies. In deze laatste periode heeft Bert ook een grote rol gespeeld bij het moderniseren van de vormgeving van Euclides.
Wegens drukke werkzaamheden houdt Bert er nu mee op.
De redactie weet echter zeker dat we in Euclides toch nog regelmatig zullen horen van Bert. Door zijn onderzoek naar wiskundeonderwijs en door zijn voorzitterschap van de CEVO-sectie WiskundeA blijft Bert betrokken bij het wiskundeonderwijs.
Alleen de redactie van Euclides zal het nu zonder hem moeten rooien.
Bert, namens allen, bedankt voor het vele werk voor Euclides!

De toekomst

In het vorige nummer van Euclides heeft u in een bijlage kunnen lezen, dat het bestuur van de Vereniging op een andere wijze georganiseerd zal worden. Veel werk zal plaatsvinden in werkgroepen, door en voor leden.
De redactie van Euclides zal proberen zoveel mogelijk steeds een redacteur te koppelen aan zo'n werkgroep, dan wel een werkgroepslid te koppelen aan de redactie van Euclides. Daarmee hoopt de redactie de leden nog beter dan nu op de hoogte te houden van actuele ontwikkelingen.
De redactie vindt Euclides hét blad voor wiskundedocenten. Er is altijd ruimte voor docenten die ervaringen willen melden, hun didactische ideeën naar voren willen brengen en hun mening willen geven over de ontwikkelingen in het wiskundeonderwijs.
Met name is de redactie ook op zoek naar docenten die in hun klas interessante projectjes doen.
In het eerste nummer van de nieuwe jaargang zal een uitgebreide oproep voor nieuwe redactieleden komen te staan. Misschien kunt u er nu alvast uw gedachten over laten gaan.

* Met dank is gebruik gemaakt van bijdragen van Martinus van Hoorn.

-



besprekin

Hans Magnus Enzensberger
De telduivel
Een hoofdkussenboek voor iedereen die bang voor wiskunde is

De Bezige Bij, Amsterdam 1997
263 bladzijden, prijs *ƒ* 39,90
ISBN 90 234 8149 6

Wiskunde- een duivelskunst?

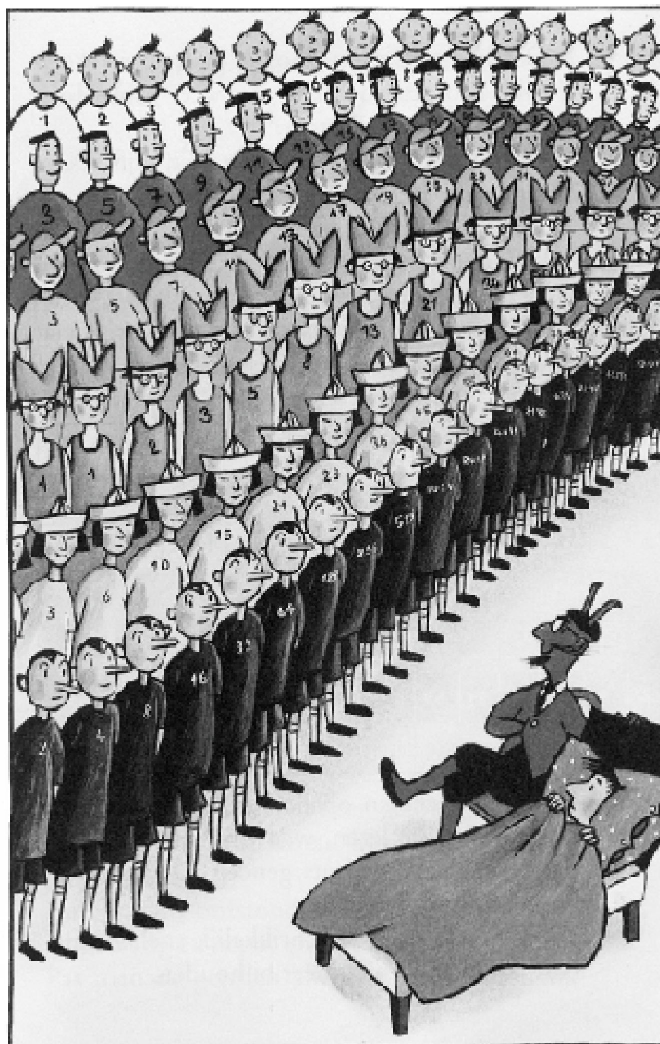
Een paar weken geleden vond in het Museon in Den Haag een opvallende gebeurtenis plaats. De minister van onderwijs, Jo Ritzen, sprak daar een gehoor van een paar volwassenen en ongeveer honderd basisschoolleerlingen toe. Dat gebeurde in het kader van wat in essentie een commerciële aangelegenheid was: de presentatie van een nieuw boek van de bekende literaire uitgeverij 'De Bezige Bij'. Kennelijk was er iets bijzonders met dat boek, anders had men vermoedelijk niet een minister bereid gevonden een boek te promoten en min of meer op zijn hurken een groep tien- tot twaalfjarigen toe te spreken.

Het moet gezegd: het boek dat gepresenteerd werd, is ook een wat ongewoon boek. Het gaat om 'De telduivel', volgens de ondertitel 'Een hoofdkussenboek voor ieder die bang voor wiskunde is'. De auteur van het boek is Hans Magnus Enzensberger. Ook dat is nogal bijzonder.

Enzensberger (1929) is in Duitsland zeer bekend als dichter en als enigszins links georiënteerd essayist. Voorzover ik weet is hij geen kinderboekenschrijver en hij is zeker geen wiskundige. Volgens de uitgever is het boek in een aantal landen een 'megaseller': in Duitsland en Italië zijn al meer dan 60.000 exemplaren verkocht, in Japan zelfs meer dan 150.000. In veel landen zijn vertalingen verschenen of in voorbereiding. Kennelijk vond Ritzen, in het kader van de promotie van de exacte vakken, het boek belangrijk genoeg om aan de presentatie daarvan mee te werken. Een boek kortom dat ook in Nederland wel de nodige aandacht en publiciteit zal trekken.

					1
					1
					2
					3
					5
					8
					13
					21

Hoe moeten we vanuit de wereld van het wiskundeonderwijs daar nu tegenaan kijken? Eerst wat over de inhoud. De hoofdpersonen van het boek zijn Robert, een jongen van zo'n twaalf, dertien jaar en Teplotaxl, de telduivel. Robert zit op de middelbare school - de brugklas, zo lijkt me - en heeft het daarop, in ieder geval bij wiskunde, maar matig naar zijn zin. Hij heeft nogal eens last van nachtmerries, totdat de telduivel in zijn dromen verschijnt. De telduivel is 'een tamelijk oud en klein heertje, ongeveer zo groot als een sprinkhaan'. Hij blijkt tamelijk driftig, maar toch kunnen Robert en hij na een poosje redelijk met elkaar overweg. In twaalf dromen laat de telduivel Robert kennismaken met allerlei aspecten van wiskunde. Voor een deel zijn het onderwerpen waarvan je mag verwachten dat Robert die ook wel op school zal krijgen: negatieve getallen, machtsverheffen, worteltrekken, gewone en decimale breuken. Maar ook onderwerpen die helemaal niet tot de schoolstof behoren komen aan bod. Achterin het boek is een 'zoek-en vindlijst' opgenomen, die in alfabetische volgorde een overzicht geeft van wat er aan wiskundige onderwerpen aan de orde komt. Het eerst genoemde onderwerp is 'aftelbaar oneindige verzamelingen', gevolgd door onderwerpen als het handelsreizigerprobleem, kettingbreuken, imaginaire getallen, de stelling van Euler en de fles van Klein. In totaal bevat de lijst 93 onderwerpen en namen. Onder die namen treffen we niet alleen voor de hand liggende aan als die van Pythagoras, maar ook bijvoorbeeld Russell en Whitehead (het boek bevat ook een bladzij uit de Principia Mathematica!). Een opvallend afwezige is Euclides.

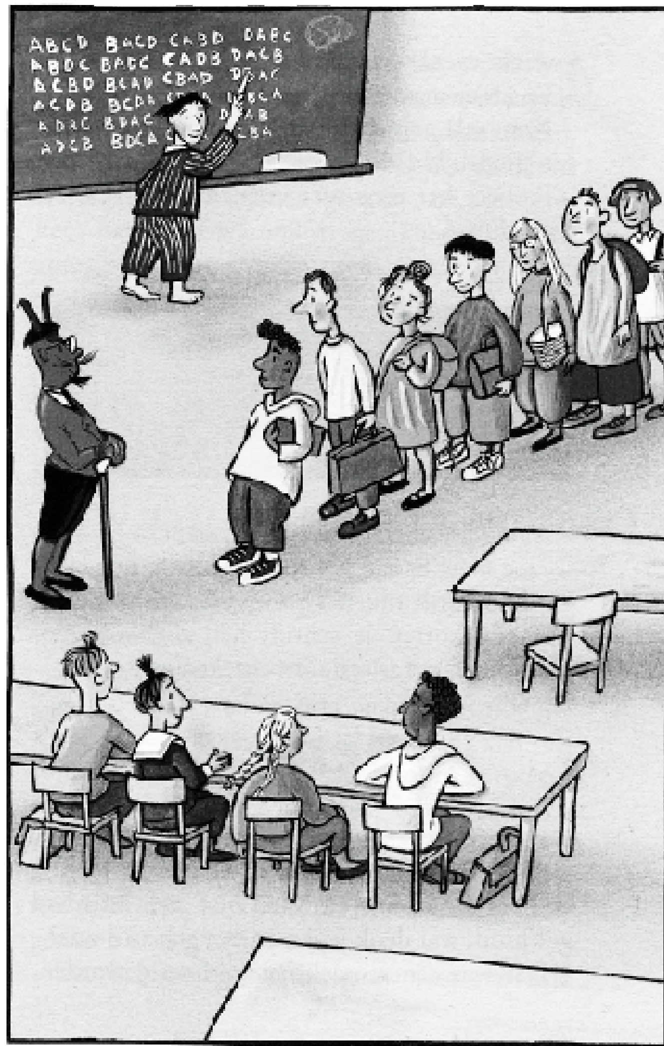


Een boek kortom dat misschien het best gekarakteriseerd kan worden als een 'caleidoscoop' van de wiskunde, maar dan niet, zoals meestal, voor wiskundestudenten, maar voor brugklassers. Dat betekent natuurlijk dat het om een lezerspubliek gaat dat niet alleen over geringere wiskundige kennis beschikt, maar dat ook veel nadrukkelijker voor het onderwerp gewonnen moet worden: het moet immers zelfs aantrekkelijk zijn voor iedereen die bang is voor wiskunde! Dat wordt dan geprobeerd door de inkleding in twaalf dromen, de exotische figuur van de telduivel, de avonturen die Robert en de telduivel samen beleven en de talrijke illustraties. Ik vind het moeilijk om te beoordelen in hoeverre die inkleding een succes is. Al te spannend lijken die avonturen mij nu ook weer niet. Nogal wat wiskunde wordt uiteindelijk toch tamelijk 'sec' gepresenteerd. Het is natuurlijk wel aardig om de reeks van Fibonacci in een droom met 'echte' haasjes te introduceren - al zou ik niet weten waarom het leuker is om Bonatsji in plaats van Fibonacci te schrijven - maar het gaat toch al spoedig om de bekende eigenschappen van die reeks, en dan helpen hazen niet zoveel.
Maar niettemin: het kan best zijn dat voor een aantal leerlingen van zo'n tien tot veertien jaar het een leuk boek is, dat ze met plezier zullen lezen. Ze komen dan in ieder geval heel wat interessante en boeiende zaken uit de wiskunde tegen. Het is daarbij natuurlijk onvermijdelijk dat het boek nogal aan de oppervlakte blijft. Onderwerpen als de formule van Euler of het handelsreizigerprobleem zijn voor brugklassers misschien wel makkelijk te begrijpen, maar zodra je er wiskundig wat meer over wil zeggen, wordt het heel wat moeilijker. Overaftelbaarheid, imaginaire getallen en limieten zijn ook als begrippen moeilijk. Het is dan ook nogal ironisch dat bij de presentatie van het boek, door

minister Ritzen voorop, steeds benadrukt wordt dat wiskunde helemaal niet moeilijk zou zijn. De telduivel spreekt dat ook uitdrukkelijk tegen. Robert merkt namelijk zelf op dat de telduivel hem wel 'een heleboel trucs verklapt', maart hij stelt zich ook de vraag: 'waarom klopt alles wat jij zegt altijd?'. Dan komt het gesprek natuurlijk op bewijzen. Als Robert dan zegt: 'Zo moeilijk kan dat bewijzen toch niet zijn', antwoordt de telduivel: 'Je hebt er geen idee van', en een eindje verder noemt hij 'bewijzen een verduveld moeilijke zaak'. Dat is het natuurlijk ook. Wiskunde is de moeite waard en interessant om de inhoud van het vak; niet omdat het zo makkelijk zou zijn. Onverwachte en boeiende resultaten van wiskunde hoeven niet op een moeilijke manier gepresenteerd te worden, dat laat dit boek overtuigend zien. Maar daaruit concluderen dat wiskunde makkelijk is, is even onzinnig als uit het beluisteren van een pianorecital door Alfred Brendel te concluderen dat pianospelen niet moeilijk is.

Is 'De Telduivel' nu 'een hoofdkussenboek voor iedereen die bang voor wiskunde is'? Dat lijkt me niet erg waarschijnlijk. Al doet de schrijver zijn best, het blijft een boek waarin de avonturen niet zoveel voorstellen, en dat vooral om wiskunde draait. Het is daarbij heel andere wiskunde dan kinderen, met of zonder wiskundeangst, op school krijgen. Hoewel het boek hier en daar wel wat aanzetten tot het zelf uitpuzzelen van opgaafjes bevat, is het toch vooral verhalend, en daardoor in de kern consumptief.

Het lijkt me uitgesloten dat het lezen van dit boek tot een beter begrip van de schoolwiskunde, laat staan tot betere vaardigheden daarin zou leiden. Nogal irritant is daarbij dat de wiskundeleraar wel erg stereotiep wordt afgeschilderd.

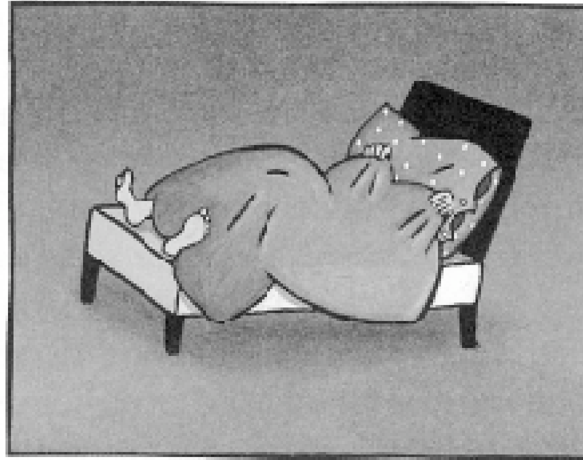


Opvallend is dat het beeld van wiskunde en wiskundigen dat in het boek gepresenteerd wordt erg traditioneel is. Wiskunde gaat over allerlei misschien wel heel interessante, maar toch ook wel heel onpraktische dingen. Wat dat betreft verschilt het boek sterk van wat in Nederlandse schoolboeken gebruikelijk is. Dat rekenen en wiskunde onmisbaar is voor het dagelijks leven, zoals ook Ritzen in zijn praatje nog eens benadrukte, kan je uit dit boek in ieder geval niet concluderen. Wiskundigen zijn daarbij maar wereldvreemde puzzelaars. In het laatste hoofdstuk wordt Robert rondgeleid in de wiskundehemel, waar alle dode wiskundigen verblijven. Die kun je niet veel anders beschrijven dan als een collectie zonderlingen. Robert verbaast er zich ook over dat er nauwelijks vrouwen bij zijn. Vrouwen spelen trouwens in het hele boek vrijwel geen rol. Dat Enzensberger een heel traditioneel beeld van wiskunde en wiskundigen heeft blijkt ook uit iets heel anders. Op Internet is een gedicht van hem te vinden getiteld 'Die Mathematiker'. Ook hierin zijn wiskundigen volstrekt wereldvreemde, vroeg opgebrande mannen, levend in abstracties, zonder enig begrip van de wereld om hen heen.

Maar daarmee hoeft het eindoordeel over 'De Telduivel' niet negatief te zijn. Het is niet onaardig geschreven, goed geïllustreerd, en het biedt voor kinderen die daarin geïnteresseerd zijn, veel boeiends. Als dat het uitgangspunt is, en er geen allerlei onrealistische verwachtingen rond het boek gekoesterd worden, is het een boek dat de moeite waard is. Bijvoorbeeld voor aanschaf in de schoolbibli-

otheek, en als aanrader voor leerlingen, jongen én meisjes, van wie je als leraar aanvoelt dat ze voor meer belangstelling hebben dan alleen voor de sommetjes en de trucjes. Alleen moeten ze dan voor de precieze uitleg van heel wat trucjes uit 'De telduivel' later wel wiskunde gaan studeren!

Harm Jan Smid



MAPLE-middag RU Leiden

MAPLE is een krachtig computeralgebrapakket dat in de toekomst een belangrijke rol kan gaan spelen in het wiskundeonderwijs.

Op 19 juni 1998 kunt u op het Mathematisch Instituut van de RU Leiden kennis maken met dit pakket door middel van een demonstratie en een practicum. Eventueel zal deze MAPLE-middag ook uitgevoerd worden op 12 juni en op 26 juni.

Kosten: ƒ175,-, inclusief materiaal en de meest recente versie van MAPLE met een licentie voor een half jaar. Nascholingscertificaat.

Inschrijven: Door overmaken van ƒ175,- op girorekening 5721772,
H. Finkelnberg, Oegstgeest voor 20 mei, ovv naam en MAPLE.

Nadere informatie:
Mathematisch Instituut
Dr. H. Finkelnberg
Postbus 9512
2300 RA Leiden
071 - 5277118 (maandag)
of 071 - 5277100

Herinnering

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Buitengewone algemene ledenvergadering

Woensdag 10 juni 1998
ROC Utrecht
Laan van Puntenburg 2
Aanvang: 19.30 uur

Agendapunt is:
Een nieuwe bestuursstructuur voor de NVvW.

Zie Euclides 73-6, middenkatern.

Uw komst gaarne melden bij de secretaris Wim Kuipers
Waalstraat 8, 8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail: 113015.261@compuserve.com

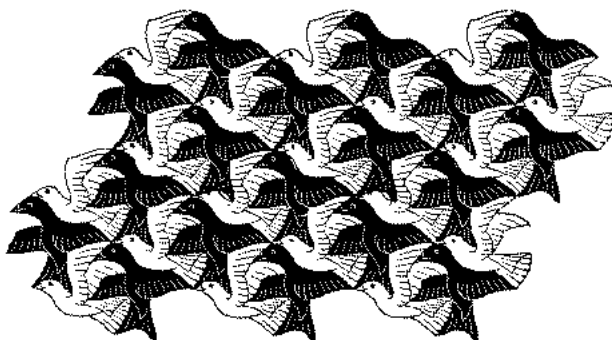
Escherprijsvraag 1998

In het kader van het honderdste geboortejaar van M.C. Escher organiseert de Stichting Ars et Mathesis samen met Pythagoras in Nederland en Vlaanderen een prijsvraag.

De opdracht

Maak een kunstwerk geïnspireerd op het werk van M.C. Escher. Het werk moet passen in een van de drie volgende categorieën:

1. Vlakvullingen
Maak een tekening waarin slechts een of twee motieven voorkomen die het vlak geheel of gedeeltelijk opvullen. Het motief kun je letterlijk herhalen, zoals Escher deed in zijn prent 'Regelmatige vlakvulling met vogels'.



M.C. Escher, Regelmatige vlakvulling met vogels, houtgravure 1949

Je mag ook het motief geleidelijk laten veranderen. Met de letterlijke herhaling van het motief suggereer je een oneindige herhaling. Met een geleidelijke verandering kun je de suggestie van oneindigheid in de tekening aanbrengen. Escher deed dit bijvoorbeeld in zijn 'Cirkellimiet I'. (zie pagina 246)

2. Onmogelijke figuren
In het werk van Escher komen 'onmogelijkheden' voor: dingen die je wel kan tekenen, maar die in de werkelijkheid niet mogelijk zijn. Bedenk zelf een of meer onmogelijkheden en verwerk die in een kunstwerk.



M.C. Escher, Man met kuboïde, houtsnede 1958

3. Betegelingen op oppervlakken in de ruimte
Escher heeft een aantal kunstwerken gemaakt door regelmatige vlakvullingen om ruimtelijke objecten heen te 'vouwen'. Maak zelf een ruimtelijk kunstwerk door een wiskundig interessant ruimtelijk oppervlak (bijvoorbeeld een buckyball, een torus of een puntige ster) te 'betegelen' met één of meerdere motieven.

Prijzen

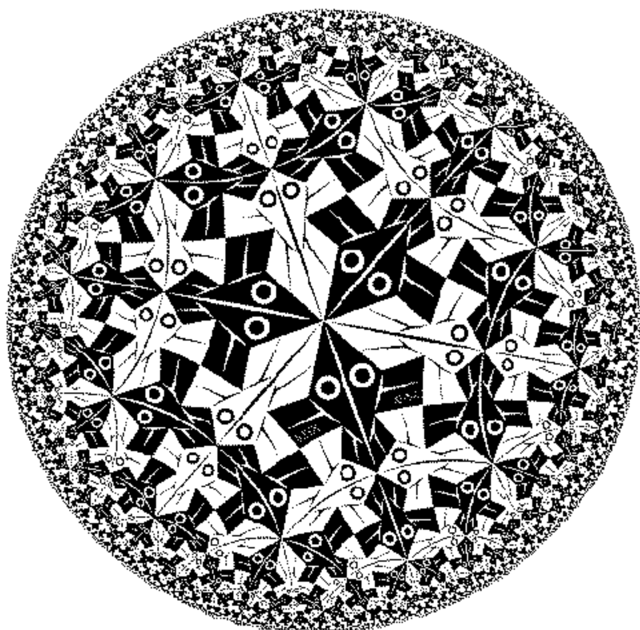
Elke prijs bestaat uit een kunstwerk en een geldbedrag.
Er zijn prijzen in drie leeftijdsgroepen:
1e prijs: ƒ 500,– , 2e prijs: ƒ 250,– en 3e prijs: ƒ 125,–.
De leeftijdsgroepen zijn:
1. onderbouw = t/m 14 jaar
2. bovenbouw = t/m 17 jaar
3. open groep = alle leeftijden

Klassenprijs

Voor schoolklassen is er een speciale prijs:
1e prijs: ƒ 1000,–, 2e prijs: ƒ 500,– en 3e prijs: ƒ 250,–
De prijzen zijn beschikbaar gesteld door de M.C. Escherfoundation, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, het Freudenthal instituut en Pythagoras (met steun van de Stichting de Wageningse Methode).

Beoordelingscriteria

Beoordeeld wordt op artisticiteit (creativiteit, originaliteit en kleurgebruik) en op wiskundige inbreng.
De jury bestaat uit: Jos de Mey, prof. dr. F. van der Blij, dr. Zsofia Ruttkay, Joke Mestdagh, prof. dr. E. Looijenga en Hans van Lint.



M.C. Escher, Cirkellimiet I, houtgravure 1958

Inzendtermijn

Inzendingen moeten uiterlijk maandag 19 oktober 1998 binnen zijn bij het redactieadres van Pythagoras:

Erjen Lefeber
Faculteit der toegepaste wiskunde
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede

Prijsuitreiking

De prijsuitreiking vindt plaats in november 1998 tijdens de Ars et Mathesis-dag te Baarn. Er wordt dan een expositie ingericht met werk van de prijswinnaars. Tezelfdertijd wordt er in kasteel Groeneveld te Baarn een tentoonstelling gehouden over het leven van M.C. Escher.

Meer informatie

Het aprilnummer van Pythagoras is een Escher-special en bevat veel aanvullende gegevens over de onderwerpen van de prijsvraag. Meer informatie is ook te vinden op Internet, op de homepage van Pythagoras. Het adres is:

www.wins.uva.nl/misc/pythagoras/Escher98/

Daar vindt u een reglement, een uitgebreide toelichting en literatuurverwijzingen. Heeft u geen Internet, dan kunt u een briefje naar de redactie schrijven, u krijgt dan de gewenste informatie thuisgestuurd. U kunt ook de redactie e-mailen:

pythagoras@wins.uva.nl.



M.C. Escher, Dodecaëder met zeester en schelpen.
Te vinden in: Leven en Werk van M.C. Escher, redactie: J.H. Locher, pagina 107.

Aangeboden

Tegen elk aannemelijk bod, de volgende tijdschriften:
Euclides van 1967 tot en met 1993.
Nieuw tijdschrift voor de wiskunde van 1964 tot en met 1988.

R. Kammer
telefoon 072-5895968

Gevraagd

Enkele redactieleden zijn nog op zoek naar jaargangen **Euclides 1 tot en met 20**.
Mocht u deze in uw bezit hebben en willen afstaan, dan wel weten of deze nog ergens te verkrijgen zijn, dan houden we ons van harte aanbevolen.

Ynske Schuringa
telefoon 040-2903232

Kees Hoogland
telefoon 023-5256735

40 jaar geleden

Enkele opmerkingen over didactiek
door Prof. Dr. E.W. Beth

Het feit, dat Dr. P.M. van Hiele en Dr. D. van Hiele-Geldof in hun artikel over 'Een fenomenologische inleiding tot de meetkunde' (*Euclides* XXXIII, pp. 33 - 47) een aantal kritische opmerkingen hebben willen wijden aan mijn 'Réflections sur l'organisation et la méthode de l'enseignement mathématique', heeft mij op zichzelf oprecht verheugd. Ik vrees evenwel dat hun kritiek in verschillende opzichten een minder juiste indruk kan wekken omtrent mijn opvattingen; de volgende kanttekeningen mijnerzijds zijn daarom wellicht niet geheel overbodig.
Mijn 'Réflections' danken hun ontstaan aan een samenspreking over leerplan-problemen, in welk verband mijn taak bestond in de behandeling van de wederkerige aanpassing van de wiskunde-programma's voor het middelbaar en hoger onderwijs. Nu houden de Heer en Mevrouw van Hiele m.i. ten onrechte in het geheel geeen rekening met deze bijzondere omstandigheid, en de door hen aangevoerde bezwaren schieten dientengevolge hun doel voorbij.

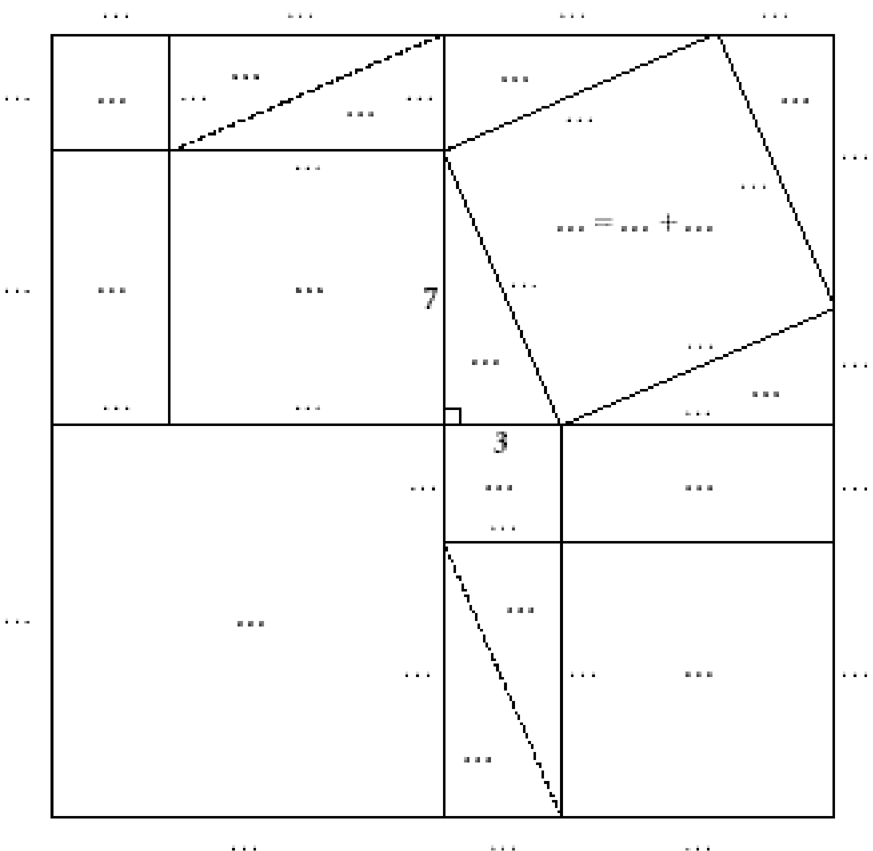
Op p. 46 beroepen de schrijvers zich op Kohnstamm's stelling volgens welke 'de ontwikkeling van het logische denken beschouwd moet worden als het resultaat van een leerproces.' Op deze stelling heb ik mij in 'De psychologische argumenten' eveneens beroepen.
Op mijn beurt moge ik thans ook een kritische opmerking maken. Ik heb ernstig bezwaar tegen de wijze waarop de schrijvers de term '*relatie*' gebruiken. Op p. 33, regel 24, schijnen zij met 'relatie' te bedoelen: uitspraak of stelling, evenals op p. 34, regel 42. Op p. 35, daarentegen wordt dezelfde term gebruikt in de zin van 'tweeledig predicaat'. Deze terminologie maakt het hier en daar zeer moeilijk, hun betoog te volgen. Zo is op p. 36, regel 9, niet te zien, welke van de twee betekenissen nu eigenlijk bedoeld is.

Uit: Euclides 33 (1957-1958)

Werkblad

De stelling van Pythagoras

- Vul alle ontbrekende zijden en oppervlakten in.
- Bereken de oppervlakte van het schuinstaande vierkant.
- Wat heeft die oppervlakte te maken met 7 en 3?
- Geef de lengte van de zijde van het schuinstaande vierkant.

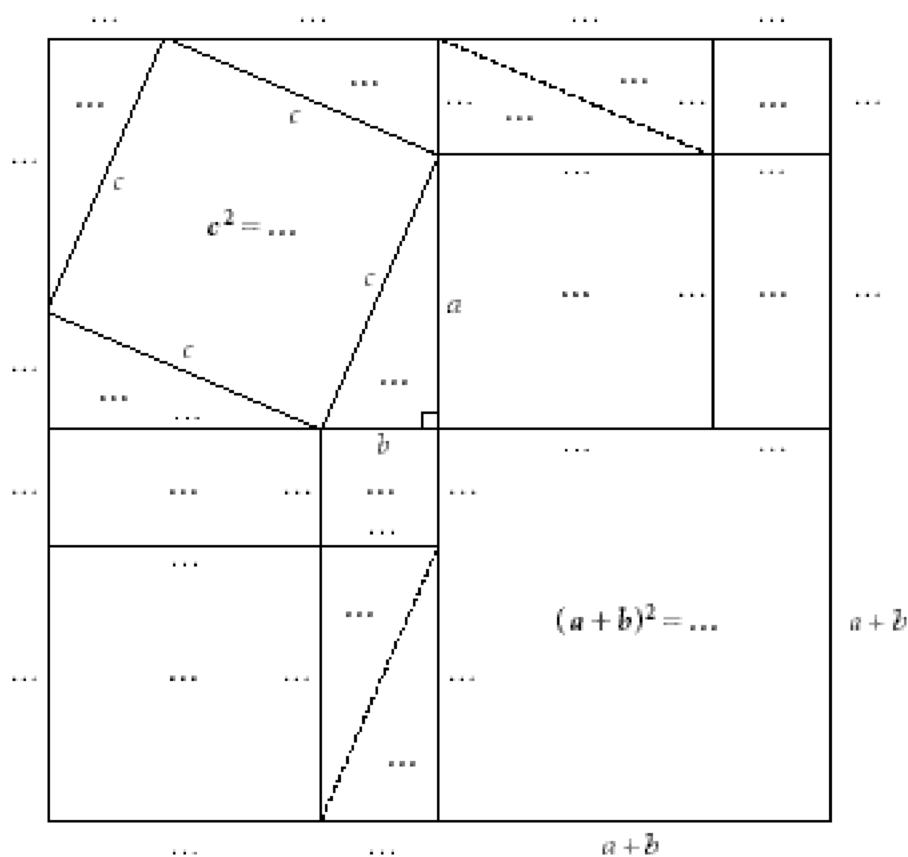


L. Ten Have, Diemen

Werkblad

De stelling van Pythagoras

- Druk alle ontbrekende zijden en oppervlakten uit in *a* en *b*.
- Vind een uitdrukking in *a* en *b* voor de oppervlakte van het schuinstaande vierkant.
- Het vierkant rechtsonder heeft oppervlakte $(a + b)^2$. Schrijf dit zonder haakjes door gebruik te maken van andere berekende oppervlakten.



L. Ten Have, Diemen

Recreatie

Opgave 685

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag

Op 30 en 31 januari 1998 vonden alweer voor de vierde keer de Nationale Wiskunde Dagen plaats. Tijdens de vele parallelsessies kon men kiezen uit de meest uiteenlopende onderwerpen. Wat dacht u van: 'Pakken en overdekken met cirkels', 'De Whizzkids prijsvragen', 'Rond het getal π' of 'De geschiedenis van de akten K1 en K5' ?

Hessel Pot uit Woerden deelde een stencil uit met als titel 'Tien vraagpunten. Graag commentaar'. Hij wil graag reacties op kwesties als 'Beginnen de natuurlijke getallen bij nul of bij één ?', 'De prioriteit van deel- en maaltekens', 'Waarom 'helen uithalen'?', enzovoort.

Als u Recreatie 685 oplost en instuurt, wilt u dan ook eens uw reactie geven op

Vraagpunt 3
'Volgend jaar, in Romeinse cijfers'.
MCMXCIX of MCMIC of MXMIX of MIM.
Welk van de vier notatie-vormen is het meest correct?
Bestaan er regels die hierover een uitspraak doen?
En door wie worden zulke regels dan bepaald?

Deze maand gaan de opgaven over de decimale/Romeinse notatie van getallen.

Opgave I $\bullet\ \bullet \times \bullet\ \bullet = \bullet\ \bullet\ \bullet$

In het decimale stelsel: vul gewone cijfers in zdd de vermenigvuldiging klopt.
In het Romeinse stelsel: vul Romeinse cijfers in zdd DEZELFDE vermenigvuldiging op de stippen past!

Bijvoorbeeld: 15 × 20 = 300
en XV × XX = CCC
Zoek de andere oplossing!

Opgave II Dezelfde opdracht bij $\left(\dfrac{\bullet\ \bullet\ \bullet}{\bullet\ \bullet\ \bullet}\right)^{\bullet} = \left(\dfrac{\bullet\ \bullet\ \bullet}{\bullet}\right)$

Opgave III Dezelfde opdracht bij $\bullet\ \bullet\ \bullet - \bullet\ \bullet = \bullet\ \bullet : \bullet$

Maximaal V ladderpunten zijn er te verdienen als u uw oplossingen binnen I maand instuurt.

Oplossing 682

Recreatie

Alle inzenders vonden de juiste oplossing van
• • × MARTIN = GARDNER, die in de vorm van een staartdeling gegeven was. Men moest dus heel erg op de stippen letten!

```
23 / 7089658 \ 308246
     69
     --
      189
      184
      ---
        56
        46
        --
        105
         92
        ---
         138
         138
         ---
           0
```

Een aantal lezers merkte op dat de staartdeling 39 / 8079357 \ 207163 een ‘bijna-oplossing’ is. We hebben bij 6 x 39 slechts één cijfer te veel!

De vermenigvuldiging
. A × . MARTIN = . GARDNER
heeft meer problemen veroorzaakt. Bijna alle inzenders hebben de kleine stipjes als een willekeurig cijfer opgevat. De unieke oplossing is dan
14 × 5248697 = 73481758.

Eigenlijk mogen getallen niet met een nul beginnen. Desondanks zonden sommigen de oplossing
14 × 0248697 = 03481758 in.

Als getallen wel met een nul moeten beginnen, dan kun je er decimale breuken van maken. En dat was eigenlijk de bedoelde opgave: de punten waren decimale punten oftewel komma’s.
En ook déze opgave heeft een unieke oplossing:
. 2 × . 124867 = . 0249734
oftewel
0,2 × 0,124867 = 0,0249734.

Met 65 punten is winnaar van een boekenbon van *ƒ* 25,–:

Jan Verbakel
Mahatma Gandhilaan 22
5653 ML Eindhoven

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Hieronder treft u de verschijningsdata aan van de volgende nummers van Euclides. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Voor of op die datum dienen uw mededelingen bij de hoofdredacteur te zijn. Dit kan ook via e-mail: cph@xs4all.nl

nr.	versch.	deadline
8	18-06-98	07-05-98
1	03-09-98	17-07-98
2	08-10-98	28-08-98

Examendata
vbo B:
do. 14 mei 1998.
vbo/mavo C/D:
di. 19 mei 1998.
havo wiskunde A:
vr. 15 mei 1998.
havo wiskunde B:
wo. 27 mei 1998.
vwo wiskunde A:
di. 19 mei 1998.
vwo wiskunde B:
vr. 15 mei 1998.
herexamens:
di. 23 juni 1998.

Examenbesprekingen
vbo B:
di. 19 mei 1998.
vbo/mavo C/D:
ma. 25 mei 1998.
havo wiskunde A:
wo. 20 mei 1998.
havo wiskunde B:
vr. 29 mei 1998.
vwo wiskunde A:
ma. 25 mei 1998.
vwo wiskunde B:
wo. 20 mei 1998.
Uitgebreid overzicht p. 236

Regionale bijeenkomsten TWIN
di. 12 / di. 19 mei 1998
twin@fi.ruu.nl

HKRWO-symposium: Leren door doen
za. 30 mei 1998
Historische Kring Reken- en Wiskundeonderwijs
E. de Moor: 020-6121382
Zie aankondiging blz. 161

NVvW
Buitengewone algemene ledenvergadering
wo. 10 juni 19.30, Utrecht
Agendapunt: Nieuwe bestuursstructuur NVvW
Zie Euclides 73-6, middenkatern

M.C. Escher conferentie
24-28 juni 1998
Rome, Ravello, Italië
www.mat.uniromal.it/escher98

Vierkant Wiskundekampen
Lunteren
10 - 14 augustus 1998:
Origo: 10 t/m 12 jaar
Bèta: 12 t/m 14 jaar
Triangle: 14 t/m 17 jaar
Exponent: 17 t/m 19 jaar
Voor meer informatie:
Vierkant: 020 - 4447776
Zie www-site laatste kolom
Zie ook Euclides 73-6 p. 200 e.v.

Data nieuwe schooljaar
Wil eenieder die relevante data heeft voor het nieuwe schooljaar deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur: cph@xs4all.nl

---

Jaarvergadering en studiedag NVvW
za. 14 november 1998
Aankondiging volgt later

Wiskunde A-lympiade
vr. 27 november 1998
Freudenthal instituut:
030 2611 611
Aankondiging volgt later

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 5 en za. 6 februari 1999
Freudenthal instituut:
030 2611 611
Aankondiging volgt later

Internetsites voor wiskundedocenten:

Vierkant
Zomerkampen en wiskundeclubs, van de zomer en volgend schooljaar?
www.cs.vu.nl/~vierkant

Pythagoras-Escherprijsvraag
Voor meer informatie zie dit nummer van Euclides en verder op
www.wins.uva.nl/misc/pythagoras

WiskundE-brief
Voor docenten die recent over e-mail beschikken: U kunt zich nog steeds aanmelden voor de WiskundE-brief: één- of tweewekelijks reacties, nieuwtjes en opinies ontvangen via e-mail. Inmiddels meer dan 300 deelnemers. Opgeven bij andriess@concepts.nl of gerardk@xs4all.nl.

Tweede fase plannen Zernike College
home.wxs.nl/~hklein/kerngr.htm

Suggesties voor interessante sites graag zenden aan Kees Hoogland
e-mail: cph@xs4all.nl

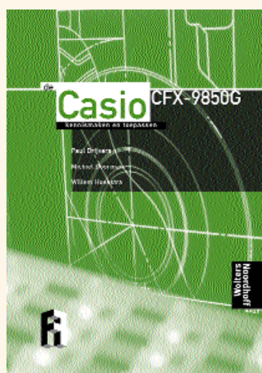
Casio
grafische
wetenschappelijke
rekenmachines?

Bereidt uw leerlingen nu al voor op het gebruik van de grafische rekenmachine!

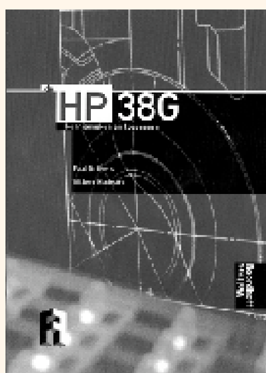
Wist u dat uw leerlingen op het examen wiskunde A oude stijl in 2000 en 2001 een grafische rekenmachine mogen gebruiken? Dat geldt trouwens ook voor natuurkunde, scheikunde, biologie, economie, handelswetenschappen en recht, economische wetenschappen 2 en recht, en management en organisatie.

Voor het vak wiskunde zijn bij Wolters-Noordhoff nu drie handige hulpboekjes verschenen: voor elk van de drie toegestane typen grafische rekenmachines één.

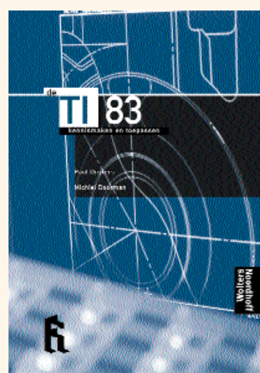
Naast knoppentaal bevatten de boekjes oefenopgaven. Practica leiden uw leerlingen stap voor stap langs de belangrijkste gebruiksmogelijkheden. De boekjes zijn naast elkaar bruikbaar en geschikt voor gebruik in de klas en thuis.



De Casio cfx 9850G, kennismaken en toepassen
ISBN 90 01 83291 1
48 p met hulpkaart ƒ 7,95



De HP-38G, kennismaken en toepassen
ISBN 90 01 83292 X
50 p met hulpkaart ƒ 7,95



De TI-83, kennismaken en toepassen
ISBN 90 01 83290 3
50 p met hulpkaart ƒ 7,95

Laatste nieuws

CEVO-medelingen "De centrale examens voor havo in 2000 en 2001 en vwo in 2001 en 2002"

5 Wiskunde A / 5.1 Algemeen
Voor de examens oude stijl en nieuwe stijl zal naast de huidige rekenmachine ook een grafische rekenmachine worden toegestaan.
Voor de havo gaat dat in 2000 in, voor vwo in 2001. Bij de examens oude stijl zal er op gelet worden dat de grafische rekenmachine voor het maken van de opgaven niet van wezenlijk belang is.

Bron: Uitleg, Gele katern 14e jaargang nr. 8, 18 maart 1998

Wolters-Noordhoff
Postbus 58
9700 MB Groningen
Telefoon (050) 522 63 11

Ook verkrijgbaar via de boekhandel

Wolters Noordhoff